不完全信息博弈简介

博弈论课程

不完全信息 v.s. 不完美信息

不完全信息 (incomplete information, 另一个常见的翻译是不完备信息):

- 某个博弈参与人不了解其它参与人的策略空间或效用函数
- 另一种表述: 某个博弈参与人不了解其它参与人的特质

不完全信息的例子:

- 扑克牌, 麻将
- 拍卖
- 选举投票

不完全信息 v.s. 不完美信息

不完美信息 (imperfect information): 某个博弈参与人看不见其它参与人的行动

- 我们前面学过的所有同时行动静态博弈都是不完美信息博弈.
- 例: 囚徒困境, 石头剪刀布, 古诺竞争, 约会博弈, 等等

不完美信息博弈的博弈树:

- 用博弈树来表示不完美信息博弈时, 会出现包括两个或以上节点的信息集.

不完全信息静态博弈

- 产量竞争
  - 例: 古诺竞争中, 厂商 1 可能不了解其它厂商的生产成本.
  - 当厂商 1 制定生产计划时, 需要考虑厂商 2 的产量, 但厂商 2 的产量取决于厂商 2 的生产成本, 因此厂商 1 需要对厂商 2 的生产成本进行推断.
- 密封拍卖 (sealed-bid auctions)
  - 一价拍卖: 价高者得, 且支付价格等于竞标价
  - 二价拍卖: 价高者得, 且支付价格等于第二高的竞标价

不完全信息静态博弈: 求婚博弈

- 张三(参与人1)考虑是否要向正在交往的李四(参与人2)提出求婚

行动集:

- 张三的行动: $a_1 \in \{求, 不求\}$
- 李四的行动: $a_2 \in \{接受, 不接受\}$

效用函数:

- 若张三选择不求婚, 博弈结束, 双方效用均为 0
- 若张三选择求婚, 李四拒绝:
  - 李四效用仍为0, 张三效用为 -50

若张三选择求婚, 李四选择接受:

- 张三求婚成功, 效用为 100
- 李四的效用取决于张三的人品:
  - 如果张三靠谱, 李四效用为 100
  - 如果张三不靠谱, 李四效用为 -100

李四是否接受张三的求婚, 取决于李四对张三是否靠谱的信念 (belief).

李四

	接受	不接受
求	100，100	-50，0
不求	0，0	0，0

李四

	接受	不接受
求	100，-100	-50，0
不求	0，0	0，0

李四对张三是否靠谱的信念, 可以用两点分布 $(p, 1-p)$ 来表示:

- 在李四眼中, 张三靠谱的概率为 p, 张三不靠谱的概率为 $1-p$

如果接受张三的求婚, 李四的期望效用为:

$$100p + (-100)(1-p)$$

李四的最优策略 a_2^*:

- 若 $x > 1/2$, 接受
- 若 $x < 1/2$, 拒绝

给定李四的策略a_2^*, 张三的均衡策略 a_1^* 为:

- 若 $x > 1/2$, 求婚; 若 $x < 1/2$, 不求婚.

小结

求婚博弈的特点:

- 博弈的均衡结果取决于参与人李四对参与人张三特质的信念
- 由于这个博弈中, 张三只有两种可能的特质 ("靠谱"和"不靠谱"), 因此李四的信念可以用两点分布来描述.
  - 我们后面会用类型 (type) 这个博弈论术语来称呼张三的特质.
- 当李四认为张三的靠谱概率很高时 ($p > 1/2$), 李四会接受; 否则李四拒绝.

虽然求婚博弈是非常简化的不完全信息博弈, 但上述过程已经体现了我们分析不完全信息博弈的核心方法:
用概率分布来描述参与人对其他参与人类型 (或特质)的信念

不完全信息古诺博弈

- 市场需求 $P(Q) = a - Q$, 其中 $Q = q_1 + q_2$ 为市场总产量
- 厂商1的成本函数为 $c_1 q_1$, 厂商2的成本函数为 $c_2 q_2$
- 厂商1的边际成本 c_1 是所有参与人的共同知识.

不完全信息:

- 厂商2的成本函数却只有厂商2自己清楚
- 厂商1对 c_2 的信念为如下两点分布:
  - $\Pr[c_2 = c_H] = \theta$
  - $\Pr[c_2 = c_L] = 1 - \theta, c_H > c_L$

不完全信息古诺博弈

- 厂商一的产量记为 q_1
- 厂商二的产量取决于其成本: 记成本 c_H 和 c_L 下的产量分别为 q_H, q_L

厂商一的最优化问题:

$$\max_{q_1} \theta(a - q_H - q_1 - c_1)q_1 + (1-\theta)(a - q_L - q_1 - c_1)q_1$$

一阶条件:

$$\theta(a - q_H - q_1 - c_1 - q_1) + (1-\theta)(a - q_L - q_1 - c_1 - q_1) = 0$$

$$\implies q_1^*(q_H, q_L) = \frac{1}{2}(\theta(a - q_H - c_1) + (1-\theta)(a - q_L - c_1))$$

- 成本为 c_H 时厂商二的最优化问题:

$$\max_{q_H}(a - q_H - q_1 - c_H)q_H$$

$$\implies q_H^*(q_1) = \frac{1}{2}(a - q_1 - c_H)$$

- 成本为 c_H 时厂商二的最优化问题:

$$\max_{q_H}(a - q_H - q_1 - c_H)q_H$$

$$\Longrightarrow \ q_H^*(q_1) = \tfrac{1}{2}(a - q_1 - c_H)$$

- 成本为 c_L 时厂商二的最优化问题:

$$\max_{q_L}(a - q_L - q_1 - c_L)q_L$$

$$\Longrightarrow \ q_L^*(q_1) = \tfrac{1}{2}(a - q_1 - c_L)$$

纳什均衡 $(\bar{q}_L, \bar{q}_H, \bar{q}_1)$ 满足:

$$\bar{q}_L = q_L^*(\bar{q}_1), \quad \bar{q}_H = q_H^*(\bar{q}_1), \quad \bar{q}_1 = q_1^*(\bar{q}_H, \bar{q}_L)$$

纳什均衡 $(\bar{q}_L, \bar{q}_H, \bar{q}_1)$ 满足:

$$\bar{q}_L = q_L^*(\bar{q}_1), \quad \bar{q}_H = q_H^*(\bar{q}_1), \quad \bar{q}_1 = q_1^*(\bar{q}_H, \bar{q}_L)$$

$\Longrightarrow$

$$\bar{q}_H = \frac{a - 2C_H + C_L}{3} + \frac{1-\theta}{6}(C_H - C_L)$$

$$\bar{q}_L = \frac{a - 2C_L + C_1}{3} - \frac{\theta}{6}(C_H - C_L)$$

$$\bar{q}_1 = \frac{a - 2C_1 + \theta C_H + (1-\theta) C_L}{3}$$

不完全信息古诺博弈小结

- 厂商一不知道厂商二的成本是 c_H 还是 c_L, 它只能选择某个产量 q_1 来最大化自己的期望利润, 这个期望取决于它对厂商二成本的信念
- 厂商二知道自己的成本 $c_2 \in \{c_H, c_L\}$, 因此它只需要在给定 q_1 时最大化自己的实际利润即可.
  - 称 c_2 是厂商二的私人信息 (or, 类型)
- 最后的均衡中, 包含三个产量 $(\bar{q}_L, \bar{q}_H, \bar{q}_1)$, 其中:
  - $\bar{q}_1$ 是厂商一的均衡策略
  - $(\bar{q}_L, \bar{q}_H)$ 是厂商二的均衡策略.
  - 除了向量的形式外, 你也可以将厂商二的策略描述为类型到产量的映射:
    - $\bar{q}_2(c_2)$, 其中 $c_2 \in \{c_H, c_L\}$

静态不完全信息博弈 $\Longrightarrow$ 动态不完美信息博弈

- 对于一般的不完全信息静态博弈, 我们通常将包含私人信息的参与人策略, 表示为类型到行动的函数.
    - 例: 在上面的古诺博弈中, 厂商二的策略为它的类型(即成本)到产量的函数.
- 这种将策略表示为函数的方式, 很类似我们之前在动态博弈中, 将后手的策略表示为先手行动集到后手行动集的函数.
- 我们可以通过引入一个虚拟参与人自然, 将不完全信息博弈转化为不完美信息博弈.
    - 这个过程叫作海萨尼转换.

海萨尼转换: 例子

我们以不完全信息古诺博弈为例, 来说明海萨尼转换.

1. 自然按照概率分布 $(\theta, 1-\theta)$ 来选择厂商 2 的成本 $c_2 \in \{c_H, c_L\}$.
    - 厂商 2 私下观察到自然的行动 c_2.
    - 厂商 1 看不到自然的行动, 它对 c_2 的信念为两点分布 $(\theta, 1-\theta)$.
2. 厂商 1 和厂商 2 同时选择产量.

上面这个不完美信息博弈 (厂商1看不见自然的行动), 和我们之前分析的不完全信息博弈完全相同.

海萨尼转换: 补充说明

虽然经过海萨尼转换后, 我们可以用分析不完美信息博弈的方式来分析 c_2 不确定的古诺博弈.

但是, 如果考试时问你: 厂商二生产成本为它的私人信息的古诺博弈属于哪种博弈? 正确回答应该是不完全信息博弈.