双边拍卖

不完全信息静态博弈

双边拍卖 (或双边交易)

- 两个参与人: 买方 (B) 和卖方 (S)
  - 买方对标的的估价: $v_b \in [0,1]$
  - 卖方对标的的估价: $v_s \in [0,1]$
- 买方和卖方同时报价 p_b 和 p_s
  - 若 $p_b \geq p_s$, 则交易成功. 成交价格介于 p_b 和 p_s 之间
  - 若 $p_b < p_s$, 则交易失败.

双边拍卖的例子: 股票市场, 讨价还价, 等等.

有效分配机制

- 如果下面两个条件同时满足, 称双边拍卖机制是**有效率的**:
  1. 当 $v_b > v_s$ 时, 交易一定实现 (即买家拥有该商品)
  2. 当 $v_b < v_s$ 时, 交易一定失败 (即卖家继续持有该商品)
- 否则, 则称双边拍卖机制是**缺乏效率的**

传统经济学理论 (**科斯定理**) 认为: 交易费用为零且对产权充分界定时, 最后的分配结果一定是有效率的.

- 但是, 若 v_b 和 v_s 是参与人的私人信息, 科斯定理不成立.

Myerson-Satterthwaite 不可能定理

Myerson-Satterthwaite 定理. 当v_b 和 v_s 是参与人的私人信息时, 不存在任何分配机制(或 “博弈”)使得最后均衡中的分配结果总是有效率的.

- 这个定理是早期信息经济学的经典结论之一, 它揭示了信息不对称对均衡福利的深远影响.
- Myerson-Satterthwaite 定理也常被称为 Myerson-Satterthwaite **不可能定理**, 因为它的结论是任何博弈形式都不能保证有效的分配结果.
    - 这里的任何博弈形式可以是单期或多期的讨价还价博弈, 双方同时报价博弈, 卖家给商品设定某个价格 (即价格机制), 等等...
- 限于课时, 我们无法证明这个不可能定理. 下面我们用"双边拍卖"这个特定的博弈为例, 来说明均衡中的分配结果总是缺乏效率的.

不完全信息下的双边拍卖 (或双边交易) 模型

- 卖方的私人估价: v_s 在区间 $[0,1]$ 上均匀分布
- 买方的私人估价: v_b 在区间 $[0,1]$ 上均匀分布
- 双方同时报价博弈: 买方和卖方同时报价, p_b 和 p_s. 博弈结果如下:
  1. 若卖方报价严格更高 ($p_s > p_b$), 交易失败;
  2. 否则 ($p_s \leq p_b$), 交易成功, 交易价格为 $p = (p_b + p_s)/2$

不完全信息下的双边拍卖 (或双边交易) 模型

- 卖方的私人估价: v_s 在区间 $[0,1]$ 上均匀分布
- 买方的私人估价: v_b 在区间 $[0,1]$ 上均匀分布
- 双方同时报价博弈: 买方和卖方同时报价, p_b 和 p_s. 博弈结果如下:
  1. 若卖方报价严格更高 ($p_s > p_b$), 交易失败;
  2. 否则 ($p_s \leq p_b$), 交易成功, 交易价格为 $p = (p_b + p_s)/2$
- 这个博弈存在多个贝叶斯纳什均衡. 我们下面讨论两类均衡:
  - 一价均衡
  - 线性策略均衡

一价均衡

对任意 $x \in (0,1)$, 当买方和卖方采取下列策略时构成贝叶斯纳什均衡.

- **买方策略:** 若 $v_b \geq x$, 报价 $p_b = x$; 否则, 报价 $p_b = 0$.
- **卖方策略:** 若 $v_s \leq x$, 报价 $p_s = x$; 否则, 报价 $p_s = 1$.

一价均衡

对任意 $x \in (0,1)$, 当买方和卖方采取下列策略时构成贝叶斯纳什均衡.

- **买方策略:** 若 $v_b \geq x$, 报价 $p_b = x$; 否则, 报价 $p_b = 0$.
- **卖方策略:** 若 $v_s \leq x$, 报价 $p_s = x$; 否则, 报价 $p_s = 1$.

下面我们以买家为例, 说明对任意 $x \in (0,1)$, 他在一价均衡中都没有偏离其策略的激励.

- 给定卖方的策略, 买方在博弈中至少要报价 x 才有可能获得商品, 任何低于 x 的报价都不可能实现交易. 因此, 若 $v_b < x$, 买方的报价一定低于 x. 这时, 任何严格低于 x 的报价都是买方的优势策略.

一价均衡

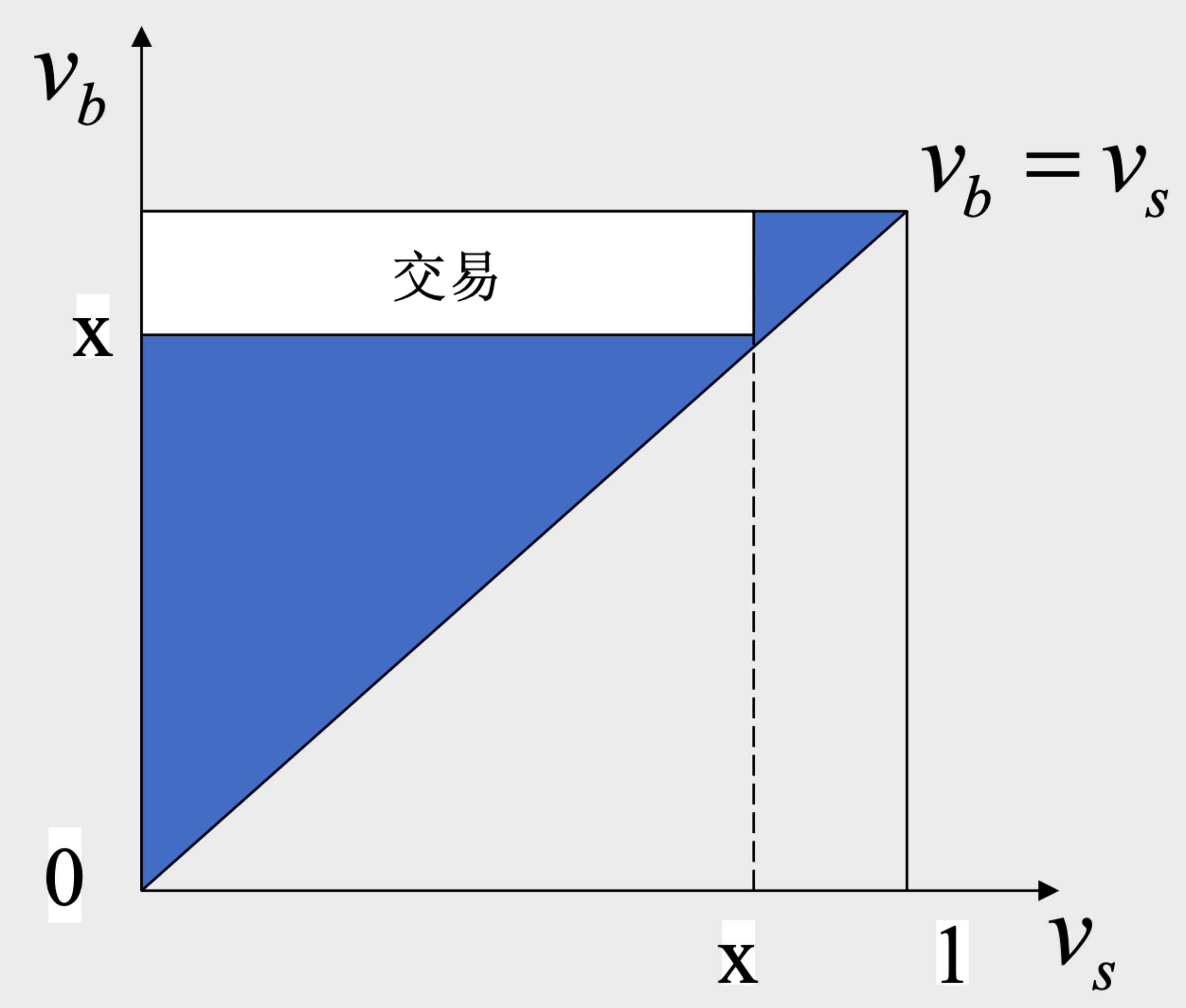
- 另一方面, 当买家的私人估价 $v_b \geq x$ 时, 报价 x 总是买家的最优反应:
  - 当卖家报价 1 时, 交易永远不可能成功.
  - 当卖家也报价 x 时, 买家报 x 能确保最后的成交价格不高于 x.
- 综上, 给定卖家的策略, 对任何 $v_b \in [0, 1]$, 买家都没有偏离均衡策略的激励. 用类似的方法可以证明, 对任意 $v_s \in [0, 1]$, 卖家也没有偏离均衡策略的激励.

一价均衡的福利性质

均衡时的福利可以用图中的矩形面积表示: $x(1-x) \leq 1/4$.

- 当 $x = 1/2$ 时, 均衡时福利最大, 为 1/4.

蓝色部分的三角形区域代表无谓损失.



线性策略均衡

- 买方策略为 $p_b(v) = a_b + c_b v$
- 卖方策略为 $p_s(v) = a_s + c_s v$

给定买方使用线性策略 $p_b(v)$, 卖方的最优化问题如下:

$$\max_{p_s} \Pr[p_s \leq p_b(v)]\,\mathbb{E}\left[-v_s + \frac{p_s + p_b(v)}{2} \middle| p_s \leq p_b(v)\right]$$

- 注意上式右边计算的是条件期望. 这里的期望算符 $\mathbb{E}$ 的作用对象是买方的估价, 它的无条件分布为 $v \sim U[0, 1]$. 在满足条件 $p_s \leq p_b(v)$ 下, v 的条件分布为区间 $[\frac{p_s - a_b}{c_b}, 1]$ 上的均匀分布.

线性策略均衡

将买方策略 $p_b(v) = a_b + c_b v$ 代入卖方的最优化问题:

$$\max_{p_s}(1 - \frac{p_s - a_b}{c_b})[-v_s + p_s/2 + (1 - \frac{p_s - a_b}{c_b})/2]$$

一阶条件为:

$$p_s^* = 2v_s/3 + (a_b + c_b)/3$$

- 注意, 这里算出来的最优反应 p_s^* 恰好也是关于 v_s 的线性函数.

线性策略均衡

- 用类似的方法，计算买方期望效用最大化问题的一阶条件:

$$p_b^* = 2v_b/3 + a_s/3$$

- 因此，线性策略均衡为:

$$p_s(v_s) = 2v_s/3 + 1/4, \quad p_b(v_b) = 2v_b/3 + 1/12$$

- 均衡中，卖方和买方策略的斜率项均为 $2/3$.
- 由于卖方的报价 p_s 不会低于 $1/4$, 买方报价低于 $1/4$ 时交易一定会失败. 为了使交易发生，买方的估价不能低于 $1/4$: $p_b(1/4) = 1/4$.

线性策略均衡的福利性质

均衡时福利可以用阴影区域上方的小三角形面积表示: 9/32.

- 由于 $9/32 > 1/4$, 线性策略均衡下的社会总福利总是高于一价均衡情形.
- 阴影区域代表无谓损失.