# 拍卖

不完全信息静态博弈

## 拍卖类型

密封拍卖 (sealed-bid auctions, 也可以翻译为暗标拍卖):

- 所有竞标人同时报价, 对应静态不完全信息博弈
- 例: 一价密封拍卖, 二价密封拍卖

公开叫价拍卖 (open-cry auctions):

- 动态不完全信息博弈
- 例: 英式拍卖, 荷式拍卖等

# 一价密封拍卖

假设雷老师使用一价密封拍卖的方式来出售他的二手 iPhone.
拍卖流程如下:

- 所有竞标人同时报价: $b_1, ..., b_n$.

拍卖结果如下:

- 价高者得: 出价最高的竞标人会获得雷老师的 iPhone.
  - 如果存在多个出价最高的竞标人, 通过公平抽签的方式随机选择胜者
- 胜者支付的价格: 价格 = 最高竞标价

## 一价密封拍卖: 博弈模型

- $n$ 个竞标人, 每个竞标人的估价 $v_i$ 彼此独立, 且服从 $[0,1]$ 上的均匀分布.
- 用 $p_i$ 表示除了参与人 $i$ 的竞标价 $b_i$ 外的最高竞标价:

$$p_i = \max\{b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n\}.$$

- 参与人 $i$ 效用函数 $u_i(v_i, b_i, p_i)$:

$$u_i(v_i, b_i, p_i) = \begin{cases} 0 & \text{若 } b_i < p_i \\ v_i - b_i & \text{若 } b_i > p_i \end{cases}$$

  - 暂时不考虑 $b_i = p_i$ 的情形. 后面我们会发现, 这个情形不影响参与人 $i$ 的期望效用.

问: 如何表示竞标人 $i$ 的策略?

## 问: 如何表示竞标人 $i$ 的策略?

竞标人 $i$ 的策略为他的类型 (即 $v_i$) 到报价的映射:

$$b_i(v_i)$$

## 问: 如何表示竞标人 $i$ 的策略?

竞标人 $i$ 的策略为他的类型 (即 $v_i$) 到报价的映射:

$$b_i(v_i)$$

- 为了简化分析, 我们仅考虑对称均衡, 即所有竞标人都使用相同的策略

$$b(v_i)$$

- 我们进一步假设这个策略是线性的:

$$b(v_i) = \alpha v_i + \beta$$

# 一价密封拍卖的纳什均衡

**命题:** 若所有参与人都使用策略 $b(v_i) = \alpha v_i + \beta$ 构成纳什均衡, 一定有 $\beta = 0$.

证明:

- 考虑所有参与人的估价 $v_i$ 均为 0 的特殊情形, 线性策略下他们的竞标价均为 $b(0) = \beta$.
- 由于竞标价永远非负, $\beta \geq 0$.
- 若 $\beta > 0$, 此时任意参与人 $i$ 的期望收益为负, 这个收益严格低于他改报 $b = 0$ 时的收益. 矛盾.
- 因此, $\beta = 0$.

## 一价密封拍卖的纳什均衡

给定其它参与人策略均为 $b(v) = \alpha v$, 参与人 $i$ 选择竞标价 $b_i$ 来最大化他的期望收益.

参与人 $i$ 的最优化问题如下:

$$\max_{b_i} \Pr[b_i > p_i](v_i - b_i)$$

问: 为什么上述目标函数中, 只考虑了 $b_i > p_i$ 情形下参与人 $i$ 的效用?

# 一价密封拍卖的纳什均衡

给定其它参与人策略均为 $b(v) = \alpha v$, 参与人 $i$ 选择竞标价 $b_i$ 来最大化他的期望收益.

参与人 $i$ 的最优化问题如下:

$$\max_{b_i} \Pr[b_i > p_i](v_i - b_i)$$

问: 为什么上述目标函数中, 只考虑了 $b_i > p_i$ 情形下参与人 $i$ 的效用?

- 当 $b_i < p_i$ 时, 参与人 $i$ 收益为 0
- 当 $b_i = p_i$, 参与人 $i$ 的期望收益为正, 但这个事件的概率为零: $\Pr[b_i = p_i] = 0$

# 一价密封拍卖的纳什均衡

$$\Pr[b_i > p_i] = \Pr[b_i > \max\{\alpha v_1, \ldots, \alpha v_{i-1}, \alpha v_{i+1}, \ldots, \alpha v_n\}] = \Pi_{j \neq i} \Pr[b_i > \alpha v_j]$$

- 对任意 $j \neq i$, $\Pr[b_i > \alpha v_j] = b_i/\alpha$. 因此参与人 $i$ 最优化问题为:

$$\max_{b_i} (v_i - b_i)(\frac{b_i}{\alpha})^{n-1}$$

- 参与人 $i$ 最优化问题的解为

$$b_i^* = \frac{n-1}{n} v_i.$$

- 因此, 均衡中 $\alpha = \frac{n-1}{n}$. 这验证了我们最开始线性策略的假设.

## 小结: 一价密封拍卖

纳什均衡中, 每个参与人的报价策略为

$$b_i^*(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i.$$

- $b_i^*(v_i) < v_i$: 参与人 $i$ 的报价永远低于其估价 $v_i$.
  - 这个结果和我们的直觉一致: 一价拍卖中, 参与人 $i$ 只有报价低于估计时才会有正收益.
- 随着参与拍卖的竞标者不断变多 ($n$ 不断上升), 参与人 $i$ 的报价会不断变大. 当 $n$ 趋于正无穷时, 他的报价会趋于 $v_i$.
  - 这个结果的直觉如下: 随着 $n$ 变大, 竞标人之间的竞争也变得更激烈, 均衡中的报价会变高.

## 小结: 一价密封拍卖

均衡中, 每个参与人 $i$ 在类型 $v_i$ 时的期望收益为:

$$\frac{v_i}{n}(v_i)^{n-1} = \frac{v_i^n}{n}$$

- 竞标人的均衡收益关于 $v_i$ 递增, 关于 $n$ 递减

均衡中, 卖家的期望收入为

$$\frac{n-1}{n}\mathbb{E}[\max\{v_1, \ldots, v_n\}]$$

- 你会算 $\max\{v_1, \ldots, v_n\}$ 这个顺序统计量 (order statistic) 的期望吗?

## 关于一价密封拍卖均衡的补充说明

- 在求解纳什均衡时，我们预先假设了参与人的均衡策略是线性的. 幸运的是，最后的计算结果验证了这个假设.
- 如果你不假设 $b(v)$ 是线性的，只假设 $b(v)$ 是严格单调递增且可微的，可以通过求解微分方程的方式得到 $b_i^* = \frac{n-1}{n} v_i$.
  - 数学功底较好的同学可以自行尝试这个解法，我们在课上就不介绍了.
  - 考试和作业中，如果涉及到一价密封拍卖，你可以直接假设所有参与人都使用线性策略.
- 最后的均衡结果，非常依赖所有 $v_i$ 均独立同分布这个假设.
  - 如果放松这个假设，均衡结果会发生很大变化.
  - 但是，二价拍卖的均衡结果完全独立于关于 $v_i$ 分布的假设!

# 二价密封拍卖 (也叫 Vickrey 拍卖)

## 二价拍卖

二价拍卖最早由诺贝尔经济学得主 Vickrey 提出, 因此也被称为 **Vickrey 拍卖.**

二价拍卖的规则如下:

- 所有竞标者同时出价
- 价高者得, 但**只需支付第二高的报价**, 而非自己的报价.

**例:**

- 张三出价100元, 李四出价80元, 王五出价90元.
- **结果**：张三获胜, 但只需支付第二高的价格（90元）, 而不是自己的100元.

## 二价拍卖的好处

- **鼓励真实报价**：竞标者不用担心“报高价会吃亏”，因为实际支付价格与自己的报价无关.
- **减少博弈操纵**：
  - 传统的一价拍卖中，竞标者可能故意压低价格甚至合谋，并且均衡结果难以预测 (我们前面求解的均衡，仅仅是每个 $v_i$ 都独立且服从均匀分布时的情形)
  - 二价拍卖中，实话实说总是每个参与人的优势策略.

由于二价拍卖的种种好处，它的各类变种在现实中应用十分广泛:

- **谷歌广告拍卖**：实际采用类似二价拍卖的规则，鼓励广告主诚实出价.
- **政府招标**：防止投标方恶意抬价或压价.

# Vickrey 定理

**Vickrey 定理:** 对任意参与人 $i$, 策略 $b_i^*(v_i) = v_i$ 是优势策略.

# Vickrey 定理

**Vickrey 定理:** 对任意参与人 $i$, 策略 $b_i^*(v_i) = v_i$ 是优势策略.

- $v_i$ = 竞标者 $i$ 的真实估价（比如你认为商品值100元）
- $b_i$ = 竞标者 $i$ 的实际报价（可以"撒谎", 比如报80元或120元）
- $p_i$ = 除了参与人 $i$ 外, 其它参与人的最高报价

证明思路:

- 对任意 $(v_i, p_i)$, 实话实说（即 $b_i = v_i$) **总是** 参与人 $i$ 的最优反应.
  - 这里的"**总是**"包含三种情况: $v_i < p_i$, $v_i = p_i$, $v_i > p_i$
  - 对上述每一种情况, 分别验证 $b_i = v_i$ 优于行动 $b_i > v_i$ 和行动 $b_i < v_i$ 即可.

| | $v_i < p_i$ | $v_i = p_i$ | $v_i > p_i$ |
|---|---|---|---|
| $b_i < v_i$ | 0 | 0 | $v_i - p_i$ 或0 |
| $b_i = v_i$ | 0 | 0 | $v_i - p_i$ |
| $b_i > v_i$ | 0 或负 | 0 | $v_i - p_i$ |

每种情况下, 行动 $b_i = v_i$ 的收益总是最高的. 证毕.