第四章: 重复博弈

有限次重复的囚徒困境博弈

- 在上一章的最后, 我们讨论了**有限次重复的囚徒困境博弈**.

1 \ 2	合作	背叛
合作	(1, 1)	(-1, 3)
背叛	(3 , -1)	(0, 0)

- 我们用逆向归纳法说明了, **有限次重复**囚徒困境博弈存在唯一的子博弈完美均衡结果, 其中每期的博弈结果均为 **(背叛, 背叛)**.
- 这个结果和我们的直觉不合. 在长期的互动中, 行为人通常会彼此合作.
- 本章我们介绍重复博弈理论. 在本章的最后你会知道, 行为人在**无限次重复**囚徒困境博弈中可以合作.

重复博弈

- 考虑两人博弈 $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, 其中
  - S_i 为行为人 i 的策略集, $u_i(s_1, s_2)$ 为行为人 i 的效用函数.
- $G(T)$: 将博弈 G 重复 T 次. 参与人在博弈 $G(T)$ 中的总效用为其 T 期博弈的效用之和.

$$U_i = \sum_{t=1}^{T} u_{i,t}, \text{ 其中} u_{i,t} \text{ 为参与人 } i \text{ 在第 } t \text{ 期的效用}$$

重复博弈

- 考虑两人博弈 $G=\{S_1,S_2;u_1,u_2\}$, 其中
  - S_i 为行为人 i 的策略集, $u_i: S_1\times S_2\to\mathbb{R}$ 为行为人 i 的效用函数.
- $G(T)$: 将博弈 G 重复 T 次. 参与人在博弈 $G(T)$ 中的总效用为其 T 期博弈的效用之和.

$$U_i=\sum_{t=1}^{T}u_{i,t},\ \text{其中}u_{i,t}\ \text{为参与人}\ i\ \text{在第}\ t\ \text{期的效用}$$

- $G(\infty)$: 将博弈 G 重复无穷次. 参与人 i 在博弈 $G(\infty)$ 中的总效用为:

$$U_i=\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}u_{i,t},\ \text{其中}\delta\in(0,1)\ \text{为参与人}\ i\ \text{的贴现率.}$$

基准博弈 G 存在唯一纳什均衡情形

- 单期博弈 G 也常被称为基准博弈.
- 重复博弈的均衡概念: **子博弈完美纳什均衡**.
  - 注: 之后讨论重复博弈时, 我们会直接说它的均衡或均衡结果, 不再强调它是子博弈完美纳什均衡.
- 我们知道, 有限次重复的囚徒困境博弈存在唯一的均衡结果, 其中每期的博弈结果均为 **(背叛, 背叛)**. 这个结果可以推广到更一般的情形.
- **命题:** 若基准博弈 G 存在唯一的纳什均衡, 则重复博弈 $G(T)$ 存在唯一的子博弈完美纳什均衡结果, 其中每一期的结果均为基准博弈 G 的均衡结果.
  - 证明方法: **逆向归纳法.**

基准博弈 G 存在多个纳什均衡情形

厂商2

厂商1		H	M	L
	H	5 , 5	0 , 6	0 , 2
	M	6 , 0	$\underline{3}$, $\underline{3}$	0 , 2
	L	2 , 0	2 , 0	$\underline{1}$, $\underline{1}$

三价博弈

单期博弈 G 的纯策略均衡：（M , M) 和 (L, L).

问: 合作结果 (H, H) 能否在 $G(2)$ 的均衡结果中出现?

- 考虑如下**触发策略** (**Trigger Strategy**):
  - 第一期选 H
  - 若第一期结果为(H, H)，则第二期选 M; 否则, 第二期选 L.
- 结论: 双方参与人均选择**触发策略**构成重复博弈$G(2)$的子博弈完美均衡.
  - 均衡结果: (H, H), (M, M).
- 证明思路: 由于第二期的子博弈中的结果为单期博弈的纳什均衡结果, 只需验证参与人在第一期没有偏离均衡的激励即可.
  - 给定参与人 2 使用触发策略,
    - 参与人 1 使用触发策略的收益为 $5+3=8$.
    - 参与人 1 在第一期偏离触发策略的最高收益为 $6+1=7<8$. 因此, 参与人 1 不会偏离触发策略.

问: 除了双方参与人都采取触发策略, 重复博弈 $G(2)$ 存在其它均衡么?

- 有, 并且很多.
- 考虑如下的"永远价格战"策略 s_{LL}:
  - 第一期选 L; 无论第一期博弈结果如何, 第二期仍选 L.
- 策略 s_{LL} 常被称为 "无记忆策略", 因为第二期的行动和第一期的结果无关.
- 可以验证, 参与人都选 s_{LL} 构成重复博弈 $G(2)$ 的子博弈完美纳什均衡.
- 同理, 参与人永远都选中间价格 M 的无记忆策略 s_{MM} 也构成重复博弈 $G(2)$ 的子博弈完美纳什均衡.
- 除了以上两种均衡外, 考虑如下无记忆策略 s_{ML}:
  - 第一期选 M. 无论第一期结果如何, 第二期选 L.
- 可以验证, 参与人都选 s_{ML} 也构成 $G(2)$ 的子博弈完美纳什均衡.

- **命题:** 假设单期博弈 G 存在多个纳什均衡结果: $O = \{o_1, o_2, ..., o_n\}$. 考虑重复博弈 $G(2)$, 对任何 $o_i, o_j \in O$, 都存在某个 $G(2)$ 的子博弈完美纳什均衡, 其第一期结果为 o_i, 第二期结果为 o_j.
    - 证明思路: 考虑所有参与人都使用无记忆策略即可.
    - 上面这个命题可以从 $G(2)$ 推广到有限次重复博弈 $G(T)$ 的情形.
- 例: 前面的三价博弈 G 有两个纯策略均衡, (M,M) 和 (L,L).
    - 根据上面这个命题, $G(2)$一定存在子博弈完美均衡, 使得每一期的结果为 (M,M) 或 (L,L).
    - 双方参与人都选择策略 $s_{MM}, s_{ML}, s_{LM}, s_{LL}$ 构成子博弈完美均衡.

- **注:** 无记忆策略构成的重复博弈均衡, 不过是单期博弈 G 均衡结果的不断重复. 如果参与人不使用无记忆策略, 重复博弈的均衡结果中有可能出现单期均衡结果 O 之外的结果.
- 例: 若 G 为三价博弈, 行为人均选择**触发策略**构成$G(2)$的子博弈完美纳什均衡, 其中第一期的均衡结果 (H,H) $\notin O$.
  - 触发策略不是无记忆策略.

无记忆策略, 马尔科夫策略 (简单了解即可)

- 重复博弈中, 参与人在第 t 期的行动可以取决于前面 $t-1$ 期的所有结果.
- 两类特殊的策略: **无记忆策略**和**马尔科夫策略**
  - 无记忆策略: 参与人当期的行动和前期的结果无关
  - 马尔科夫策略: 参与人当期的行动仅由上一期的博弈结果决定
- 一种重要的马尔科夫策略: **以牙还牙**策略 (也叫**投桃报李**策略, Tit-for-tat).
  - 以重复囚徒困境博弈为例. **以牙还牙**策略表述如下: 如果上一期对方选择合作, 则本期我也合作; 如果上一期对方选择背叛, 则本期我也背叛.

问: **触发策略**属于马尔科夫策略么? (重复囚徒困境中的**触发策略**: 第一期选择合作; 此后只要之前某一期的结果不为(合作, 合作), 就永远选择背叛)

练习. 假设 G 为两人同时行动博弈, 其中每个参与人的行动均为**合作**或**背叛**. 考虑重复博弈 $G(\infty)$, 其中:

- 参与人 1 使用如下**触发策略**:
  - 第一期选合作;
  - 随后, 只要之前某一期的结果不为 (合作, 合作), 就永远选背叛.
- 参与人 2 使用如下**以牙还牙策略**:
  - 第一期选背叛;
  - 如果上一期对方选择合作, 则本期我也合作; 如果上一期对方选择背叛, 则本期我也背叛.
- 给定以上策略, 重复博弈 $G(\infty)$ 的结果是?

答:

1. (合作, 背叛),
2. (背叛, 合作),
3. (背叛, 背叛),
4. (背叛, 背叛),
5. ...

小结

- 重复博弈 $G(T)$ 中, 参与人的策略集非常复杂.
  - 无记忆策略,
  - 马尔科夫策略 (例: 以牙还牙策略),
  - 其它策略 (例: 触发策略)
- 若G存在唯一纳什均衡, 则重复博弈$G(T)$存在唯一的子博弈完美均衡结果.
- 若G存在多个纳什均衡, 则重复博弈 $G(T)$ 的可能均衡也非常复杂, 并且均衡数目众多.

从刻画均衡到刻画均衡收益

- 我们在重复博弈中的主要关注点不是 $G(T)$ 的所有可能均衡. 因为均衡的数目太多了, 而且均衡的描述往往也很繁琐.
- 我们在重复博弈中的主要关注点是**均衡收益** (均衡中行为人的收益).
- 对于 n 人博弈, $G(T)$ 的均衡收益一般表示为向量

$$v = (v_1, \ldots, v_n)$$

  - 其中 v_i 为参与人 i 的收益.
- **Folk theorems** (或民间定理, 无名氏定理) 刻画了重复博弈中参与人的**所有均衡收益**. (下一讲内容)
  - 如你所见, folk 的中文翻译都很糟糕. 教师在课堂上会直接说 folk 定理.

补充内容: 重复博弈中参与人策略集的复杂性

- **问:** 假设单期博弈 G 为同时行动博弈, 其中每个参与人有两个可选行动: H 和 L. 参与人在重复博弈 $G(2)$ 中有几个纯策略?

- **问:** 假设单期博弈 G 为同时行动博弈, 其中每个参与人有两个可选行动: H 和 L. 参与人在重复博弈 $G(2)$ 中有几个纯策略?
  - 第一期的纯策略个数: 2
  - 第二期的纯策略个数: 2^4 (其中无记忆策略有 2 个)
  - 参与人总共有 $2 \times 2^4 = 2^5$ 个纯策略.

- 假设单期博弈 G 为同时行动博弈, 其中每个参与人有两个可选行动: H, L.
- **问:** 参与人在重复博弈 $G(3)$ 中有几个纯策略?
  - 第一期的纯策略: 2. 第二期的纯策略: 2^4
  - 第三期的纯策略?

重复博弈的策略复杂性

- 假设单期博弈 G 为同时行动博弈, 其中每个参与人有两个可选行动: H, L.
- **问:** 参与人在重复博弈 $G(3)$ 中有几个纯策略?
  - 第一期的纯策略: 2. 第二期的纯策略: 2^4
  - 第三期的纯策略?
    - 第三期的纯策略: 前两期所有可能结果到第3期行动的映射.
    - 第一期有4个可能结果, 第二期有4个可能结果, 前两期一共有 $4 \times 4 = 16$ 个可能结果.
    - 第三期的纯策略有 2^{16} 个 (其中有 2^4 个马尔科夫策略)
  - 参与人在 $G(3)$ 中纯策略个数: $2 \times 2^4 \times 2^{16} = 2^{21}$.

练习

假设单期博弈 G 为同时行动博弈, 其中每个参与人有 n 个可选行动. 参与人在重复博弈 $G(2)$ 中有几个纯策略?

练习

假设单期博弈 G 为同时行动博弈, 其中每个参与人有 n 个可选行动. 参与人在重复博弈 $G(2)$ 中有几个纯策略?

- 第一期策略: n
- 第二期策略: n^{n^2}. 其中无记忆策略有 n 个.
- 总共有 $n \times n^{n^2} = n^{n^2+1}$ 个纯策略. 其中无记忆策略有 n^2 个.