重复博弈: folk 定理, 无穷期博弈

- 假设单期博弈 G 为两人博弈, 其中参与人的策略集分别为 S_1和S_2, 效用函数为 $u_1(s_1, s_2)$ 和 $u_2(s_1, s_2)$.
- **个体理性效用** (教材定义 P146): 无论其它参与人如何行动, 参与人 i 在单期博弈 G 中能保证获得的效用上限称为个体理性效用.

- 假设单期博弈 G 为两人博弈, 其中参与人的策略集分别为 S_1和S_2, 效用函数为 $u_1(s_1, s_2)$ 和 $u_2(s_1, s_2)$.
- **个体理性效用** (教材定义 P146): 无论其它参与人如何行动, 参与人 i 在单期博弈 G 中能保证获得的效用上限称为个体理性效用.
- **个体理性效用** (严格定义): 称 v_i 是参与人 i 的个体理性效用水平, 若 $v_i \geq v_i^{mm}$, 其中

$$v_i^{mm} = \min_{s_j} \max_{s_i} u(s_i, s_j)$$

  - v_i^{mm} 一般称为行为人 i 的**最小最大** (**minmax**) 效用. **最小最大效用**的定义可以很自然地推广到多人博弈情形:

$$v_i^{mm} = \min_{s_{-i}} \max_{s_i} u(s_i, s_{-i})$$

		厂商2	
		A	B
厂商1	A	3 , 3	$\underline{1}$, $\underline{4}$
	B	$\underline{4}$, $\underline{1}$	0 , 0

问: 厂商1的个体理性效用是多少?

		厂商2	
		A	B
厂商1	A	3 , 3	$\underline{1}$, $\underline{4}$
	B	$\underline{4}$, $\underline{1}$	0 , 0

问: 厂商1的个体理性效用是多少?

- 给定厂商2选A, 厂商1最大效用水平为 4.
- 给定厂商2选B, 厂商1最大效用水平为 1.
- 厂商1的最小最大效用为 $v_1^{mm} = \min\{1, 4\} = 1$.
- 任何 $v_1 \geq 1$ 都是厂商1的个体理性效用.

效用向量

- 对于 n 人博弈, 博弈结果中所有参与人的最终效用可以表示为向量

$$\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

  - 其中 v_i 为参与人 i 的效用. 称 $\vec{v}$ 为所有参与人的**效用组合** (或**效用向量**).

- 称效用组合 $\vec{v}$ 满足**个体理性**, 若其中每个参与人的效用都是个体理性效用.
  - 也就是说, 对向量 $\vec{v}$ 的任何一个分量 v_i, 都有 $v_i \geq v_i^{mm}$ 成立, 其中 v_i^{mm} 是行为人 i 的最小最大效用.

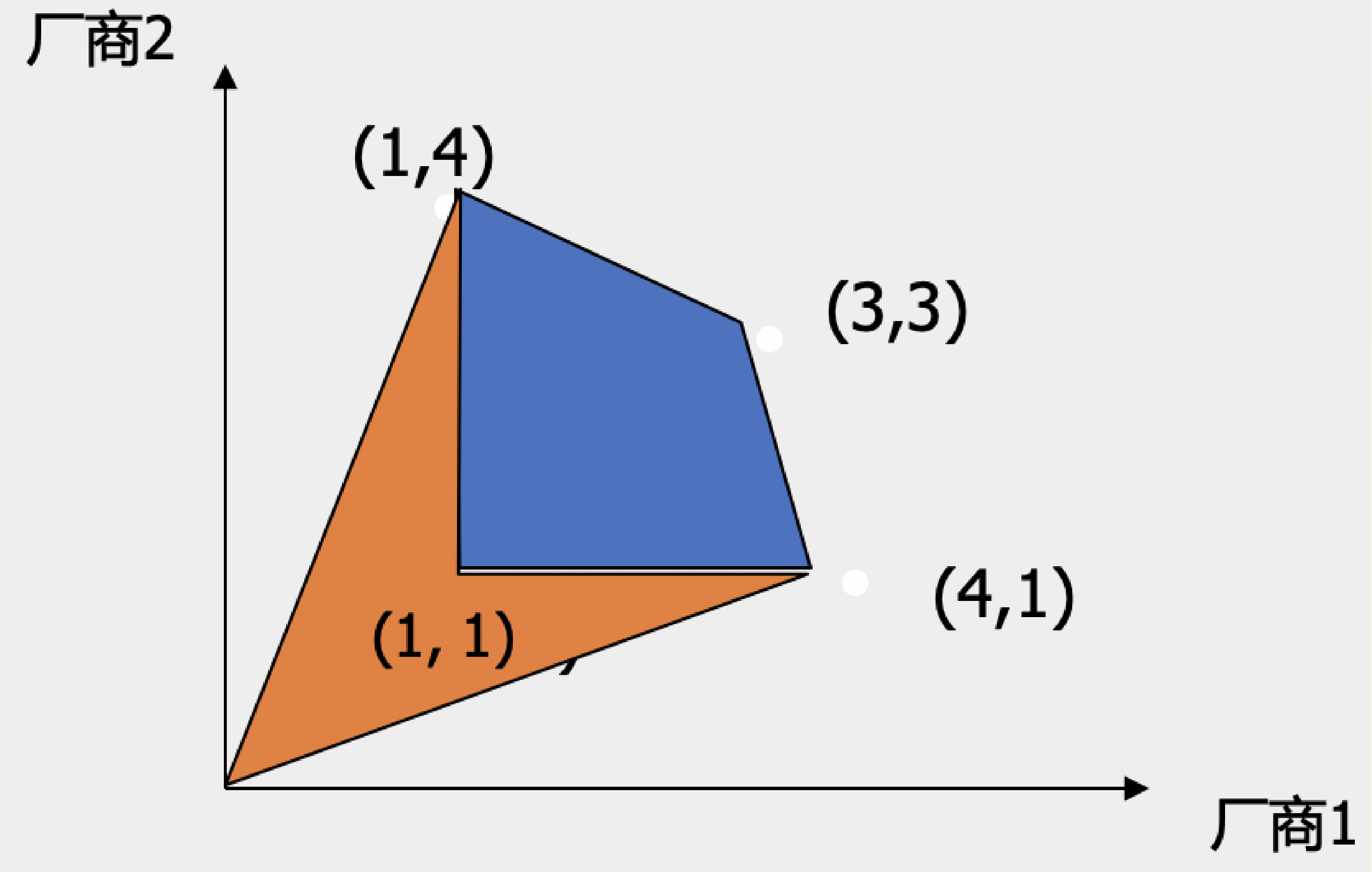
可行效用组合

厂商1 \ 厂商2	A	B
A	3 , 3	1 , 4
B	4 , 1	0 , 0

上例中, 博弈结果的**可行效用组合** v 可以表示为:

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \lambda_4\vec{v}_4$$

- 其中 $\vec{v}_1 = (3,3)$, $\vec{v}_2 = (1,4)$, $\vec{v}_3 = (4,1)$, $\vec{v}_4 = (0,0)$, 并且 $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_i \lambda_i = 1$.



- 蓝色 + 橙色区域: 所有**可行效用组合**
- 蓝色区域: 满足**个体理性**的可行效用组合.

练习

博弈 G 如下图所示, 画图表示所有满足个人理性的可行效用组合.

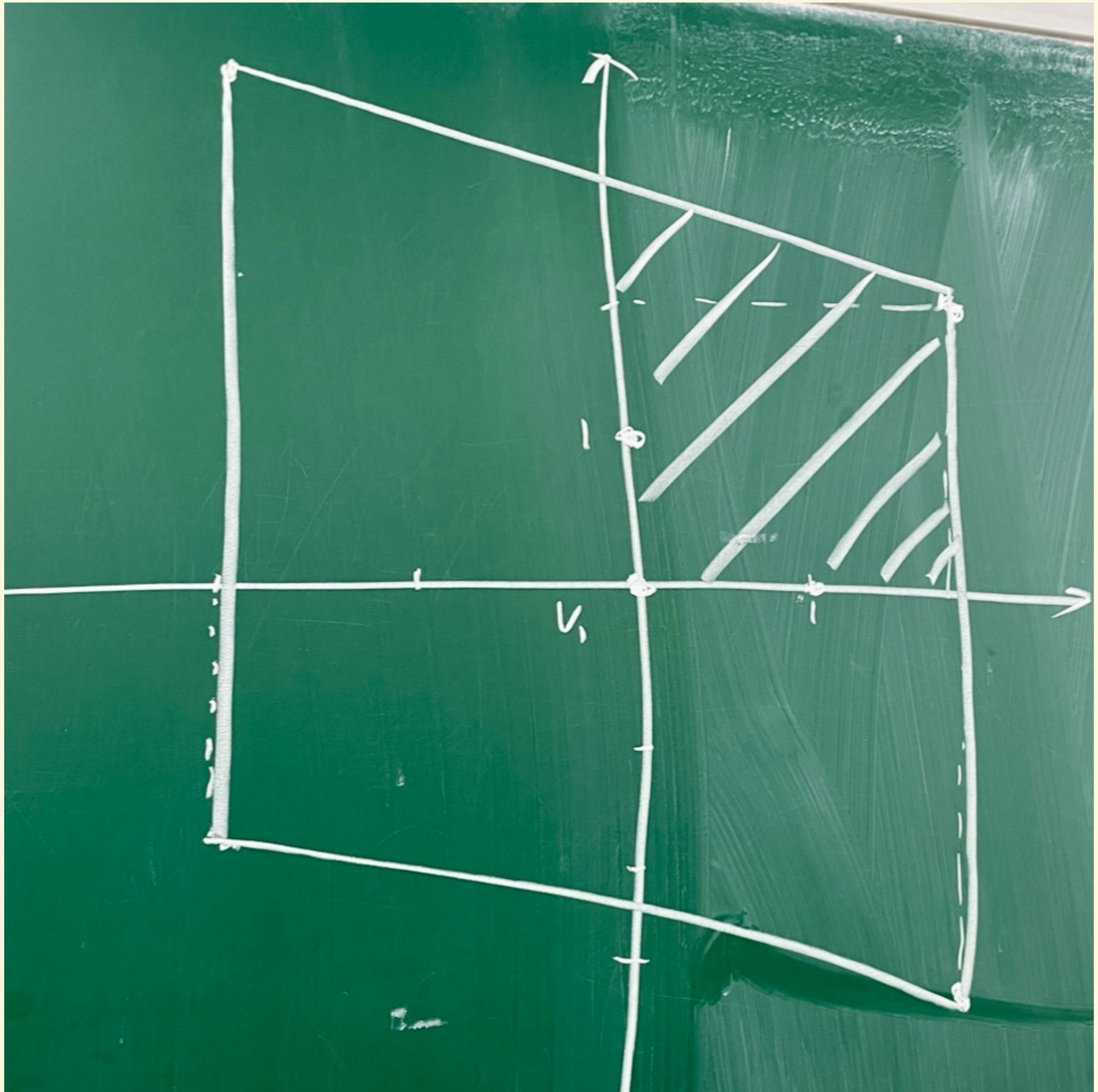
	D	C	F
D	$0,0$	$1,0$	$0,1$
C	$0,1$	$2,2$	$-2,3$
F	$1,0$	$2,-3$	$-2,-2$

练习

博弈 G 如下图所示, 画图表示所有满足个人理性的可行效用组合.

	D	C	F
D	$0,0$	$1,0$	$0,1$
C	$0,1$	$2,2$	$-2,3$
F	$1,0$	$2,-3$	$-2,-2$

- 最小最大效用: $v_1^{mm} = 0$, $v_2^{mm} = 0$
- 下图的平行四边形表示所有可行效用组合, 阴影区域表示满足个人理性的可行效用组合.


1
V1
1

平均效用

猜想: 重复博弈 $G(T)$ 中, 可能的均衡很多. 但任何均衡中, 任何参与人在每期博弈的"平均效用"都应该是可行的, 并且满足个体理性.

- 对于重复博弈, 为了让参与人的最终效用和单期博弈 G 中的效用具有可比性, 我们一般讨论参与人在重复博弈中的**平均效用**.
  - 记第 i 期博弈中所有参与人的效用组合为 $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$.
  - 有限次博弈$G(T)$的平均效用组合: $\vec{v} = \sum_{i=1}^{T} \vec{v}_i / T$
  - 无穷次博弈$G(\infty)$的平均效用组合: $\vec{v} = (1-\delta) \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{i-1} \vec{v}_i$

folk 定理

一句话概括 folk 定理: 对于重复博弈中的均衡收益, 可行性和个人理性这两个条件不仅是必要的, 也"几乎"是充分的.

有限博弈 (教材P146). 给定单期博弈 G, 令向量 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ 为其满足个人理性的可行效用组合. 在特定条件下, 向量 v 也是重复博弈 $G(T)$ 均衡中的平均效用组合.

- 注: 这里的"特定条件"包括 (1) 单期博弈 G 至少有两个纳什均衡, 并且这两个均衡收益组合不同 (2) 重复博弈期限 T 足够大 (3) ...

无穷期博弈情形

- 对于重复博弈, 我们一般更关注无穷期重复博弈, 而非有限期.
  - 部分原因是无穷期 folk 定理的前提条件比有限期 folk 定理弱很多. 比如, 无穷期 folk 定理不要求原博弈 G 有多个纳什均衡.
- 在正式介绍无穷期 folk 定理前, 我们先看两个无穷期博弈的例子: 囚徒困境和古诺竞争.
  - 在构造子博弈完美均衡时, 我们会用到**触发策略**和**以牙还牙策略**.

无穷期囚徒困境

考虑无穷期囚徒困境博弈, 单期博弈 G 如下表所示:

张三\李四	背叛	合作
背叛	(0, 0)	(3, -1)
合作	(-1, 3)	(2, 2)

- 由逆向归纳法, 有限重复博弈 $G(T)$ 的均衡结果中每一期都是 (背叛,背叛).
- 对 $G(\infty)$, 逆向归纳法失效.
- 下面我们使用触发策略构造一个 $G(\infty)$ 的均衡, 其中每一期结果都是 (合作, 合作).

触发策略

- 考虑每个行为人均选择如下“触发策略”:
  - 第一期选择 "合作"
  - 如果之前某一期的博弈结果不为 (合作, 合作), 此后永远选择 "背叛".
- 如果两个参与人都选择触发策略, 博弈结果永远为 (合作, 合作).
  参与人的总收益: $2+2\delta+2\delta^2+\cdots=2/(1-\delta)$.

问: 如何验证这个策略组合构成子博弈完美均衡?

- 根据子博弈完美均衡的定义, 我们需要验证 (触发策略, 触发策略) 这个策略组合在**所有子博弈中**都构成纳什均衡.
- 这个重复博弈的"所有子博弈"包括哪些博弈?

触发策略: 验证子博弈完美均衡

- 对无穷期重复囚徒困境, 每个子博弈本身和原博弈 $G(\infty)$ 都相同.
- 子博弈之间的区别在于过去的博弈**路径**不同.
- 过去博弈路径的例子:
  - (合作, 背叛)--(合作, 背叛)--(合作, 背叛)
  - (背叛, 背叛)--(背叛, 背叛)--(背叛, 背叛)
  - (合作, 合作)--(合作, 合作)
  - ...
- 可能的博弈路径有无穷多种. 但由于参与人都使用触发策略, 我们只需要考虑**两类子博弈**(或者**两类路径:**) (i) 过去所有结果均为 (合作, 合作) (ii) 过去的结果中包含(合作, 合作)以外的三种结果之一.

两类子博弈

1. 对第一类子博弈 (即过去的结果均为双方合作):
   - 张三若在第一期偏离触发策略, 博弈结果变为 (背叛,合作)--(背叛,背叛)--(背叛,背叛)-...
   - 张三在偏离路径上的总收益为 $3+0\cdot\delta+0\cdot\delta^2+\cdots=3.$
   - 只要 $3\leq 2/(1-\delta)$ (即 $\delta\geq 1/3$), 张三就不会偏离均衡路径.
   - 同理, 当 $\delta\geq 1/3$ 时, 李四也不会偏离均衡路径.
2. 对第二类子博弈 (即过去的结果中发生过背叛):
   - 此时对张三而言, 对手李四会永远选择背叛. 张三自然不会偏离永远背叛这个路径.
   - 同理, 李四也不会偏离触发策略.

无穷期囚徒困境: 以牙还牙策略

- 对无穷期囚徒困境, 考虑每个行为人均选择如下“以牙还牙策略”:
  - 第一期选择 "合作"
  - 如果上一期对方选择合作, 则本期我也合作; 否则, 本期选择背叛.
- 如果两个参与人都选择以牙还牙策略, 博弈结果还是一直为 (合作, 合作). 参与人总收益仍为 $2/(1-\delta)$.

问: 当 δ 满足何种条件时, (以牙还牙, 以牙还牙)构成子博弈完美纳什均衡?

四类子博弈

- 使用以牙还牙策略时, 参与人当期的行动只和上一期的博弈结果有关.
- 因此, 验证子博弈完美均衡时, 我们只需要考虑如下**四类子博弈**:
  1. 上一期的博弈结果为 (合作, 合作)
  2. 上一期的博弈结果为 (背叛, 背叛)
  3. 上一期的博弈结果为 (背叛, 合作)
  4. 上一期的博弈结果为 (合作, 背叛)
- 对于每一类子博弈, 我们只需要验证张三是否会在子博弈的第一期偏离以牙还牙策略即可. (One-shot deviation principle)

1. 若上一期为 (合作, 合作):
   - 均衡路径: (合,合)--(合,合)--(合,合)--...
   - 张三第一期偏离触发策略后的路径: (背,合)--(合,背)--(背,合)--(合,背)--...
   - 张三不偏离均衡路径 $\implies \delta \geq 1/3$
2. 若上一期为(背叛, 合作):
   - 均衡路径: (合,背)--(背,合)--(合,背)--(背,合)--...
   - 张三第一期偏离触发策略后的路径: (背,背)--(背,背)--(背,背)--...
   - 张三不偏离均衡路径 $\implies \delta \geq 1/3$

3. 若上一期为 (合作, 背叛):
    - 均衡路径: (背,合)--(合,背)--(背,合)--(合,背)--...
    - 张三第一期偏离触发策略后的路径: (合,合)--(合,合)--(合,合)--...
    - 张三不偏离均衡路径 $\implies \delta \leq 1/3$
4. 若上一期为 (背叛, 背叛):
    - 均衡路径: (背,背)--(背,背)--(背,背)--(背,背)--...
    - 张三第一期偏离触发策略后的路径: (合,背)--(背,合)--(合,背)--(背,合)--...
    - 张三不偏离均衡路径 $\implies \delta \leq 1/3$

综上, 当且仅当 $\delta = 1/3$ 时, (以牙还牙, 以牙还牙)构成子博弈完美纳什均衡.

无穷期囚徒困境: 小结

- 只要 $\delta \geq \delta^* = 1/3$, 就可以通过"触发策略"来构造子博弈完美均衡, 其中每一期的结果均为 (合作, 合作).
- 文字解释 (经济学直觉):
  - 贴现率越大, 张三就越在意未来的收益.
  - 当张三偏离均衡路径时, 他当期的收益会上升, 但他未来的收益会下降.
  - 因此, 张三越在意未来的收益, 他偏离均衡的激励就越小. 当 δ 足够大时, 张三就不会偏离均衡路径.
- 对于囚徒困境, 一般情况下使用"触发策略"更可能维持 (合作, 合作) 这一均衡结果, 因为 "触发策略" 对于背叛的惩罚最严重.

无穷期古诺模型

- 古诺模型: 两家寡头厂商同时定产. 假设成本均为0, 市场需求为$p = 1 - Q$.
  - 纳什均衡产量: $q_1^* = q_2^* = q^c = 1/3$. 称 q^c 为古诺产量.
  - 纳什均衡中厂商利润为 $1/9$.
  - 垄断产量: $q^m = 1/2$. 垄断利润为 $1/4$.
- 由于 $2q^c > q^m$, 两家寡头厂商如果可以合谋, 每家均将产量下降到 $q^m/2 = 1/4$, 厂商的利润均会从 1/9 上升到 1/8.
- 然而, 在单期博弈中, 这个合谋无法达成, 每家厂商都有偏离 $(q^m/2, q^m/2)$ 这个结果的激励.

问: 如果这个博弈重复无穷期, 能否实现合谋?

- 考虑如下触发策略:
    - 第一期选择合谋产量: $q = q^m/2$
    - 如果之前某一期的博弈结果不为 $(q^m/2, q^m/2)$, 此后永远选择古诺产量: $q = q^c$.
- 如果两个参与人都选择触发策略, 博弈结果永远为 $(q^m/2, q^m/2)$. 参与人的总收益: $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(1-\delta)}$.
- 如果偏离均衡路径, 我们先求解厂商第一期的最优产量:

$$\max_q (1 - \frac{q^m}{2} - q)q \implies q_1 = 3/8$$

- 厂商第一期生产 $q_1 = 3/8$; 此后给定对方永远选择古诺产量, 厂商的最优反应也是生产古诺产量.
    - 总收益为 $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{9} \cdot \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{9}{64} + \frac{\delta}{9(1-\delta)}$

两家厂商均选择触发策略构成子博弈完美均衡, 当且仅当

$$\frac{1}{8(1-\delta)} \geq \frac{9}{64} + \frac{\delta}{9(1-\delta)} \iff \delta \geq \frac{9}{17}$$

练习

对无穷期古诺模型, "触发策略" 并非总是维持合谋的最好方式. 另一种更好的方式是萝卜加大棒策略 (carrot-stick strategy):

- 第一期生产 $q_m/2$
- 从第二期开始, 厂商的产量取决于上一期的博弈结果:
  - 如果上一期的结果为 $(q_m/2, q_m/2)$或 (x, x), 则本期生产$q_m/2$
  - 否则, 本期生产 $q = x$

证明: 若 $\delta = 1/2$ 且 $x \in (3/8, 1/2)$, 双方参与人均使用萝卜加大棒策略构成子博弈完美均衡.

练习解答

自行阅读教材 P155 "加大惩罚力度和提高合作水平" 部分的内容.

folk 定理: 无穷期博弈情形

无穷期 folk 定理. 给定单期博弈 G, 令向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 为其满足个人理性的可行效用组合. 在特定条件下, 只要贴现率 δ 足够接近 1, 向量 v 也是重复博弈 $G(\infty)$均衡中的平均效用组合.

注:

- 无穷期 folk 定理成立的前提条件比有限期 folk 定理弱很多. 对于无穷期 folk 定理, 我们不要求原博弈 G 有多个纳什均衡.
- 当 δ 足够接近 1 时, 行为人会更在意未来的收益, 从而使得触发策略或以牙还牙策略能够支撑更多的均衡收益.