使用逆向归纳法求解动态博弈

授课教师: 雷浩然

湖南大学课程

两阶段讨价还价博弈 (bargaining game)

例: 两阶段讨价还价博弈 (bargaining game)

张三和李四分 100 元钱. 博弈共有两个阶段:

1. 张三提出分配方案: $(a, 100-a)$, 其中张三拿 a, 李四拿 $100-a$. 李四选择接受或拒绝.
   - 若李四接受, 博弈结束. 两人效用分别为 a 和 $100-a$.
   - 若李四拒绝, 博弈进入第二阶段.
2. 李四提出分配方案: $(100-b, b)$, 其中李四拿 b.
   - 若张三接受, 博弈结束. 两人效用分别为 δb 和 $\delta(100-b)$, 其中 $\delta \in (0,1)$ 表示贴现率.
   - 若张三拒绝, 则两人按照 $(50, 50)$ 的方案均分 100 元, 效用均为 50δ.

两阶段讨价还价博弈: 逆向归纳法

- 如果博弈进入第二阶段, 李四不会选择 $b < 50$. 否则他最终分到的钱会低于 50.
- 李四会选择 $b \geq 50$. 第二阶段的分配结果一定为 $(50, 50)$, 两人效用均为 50δ.

问: 如何进一步反推张三在第一阶段的最优行动 a?

两阶段讨价还价博弈: 逆向归纳法

- 如果博弈进入第二阶段, 李四不会选择 $b < 50$. 否则他最终分到的钱会低于 50.
- 李四会选择 $b \geq 50$. 第二阶段的分配结果一定为 $(50, 50)$, 两人效用均为 50δ.
- 张三会选择 $a^* = 100 - 50\delta$, 即留给李四 50δ.
  - 李四对于接受和拒绝**是无差异的**.
- 任何 $a \neq 100 - 50\delta$ 都不会是均衡结果!
  - 若 $a > 100 - 50\delta$, 李四会选择拒绝, 博弈进入第二阶段.
  - 若 $a < 100 - 50\delta$, 张三可以再提高一点点 a, 并且李四不会拒绝.

综上, 根据逆向归纳, 两阶段讨价还价博弈的均衡结果为:

$$a^* = 100 - 50\delta, \text{李四在第一阶段选择接受}$$

- 注: 尽管此时李四对接受和拒绝是无差异的, 但在均衡中他必须选择接受. 否则, 张三的行为不再是最优反应.

综上, 根据逆向归纳, 两阶段讨价还价博弈的均衡结果为:

$$a^* = 100 - 50\delta, \text{李四在第一阶段选择接受}$$

- 注: 尽管此时李四对接受和拒绝是无差异的, 但在均衡中他必须选择接受. 否则, 张三的行为不再是最优反应.

均衡结果中, 张三的收益 $100 - 50\delta$ 大于李四的收益 50δ.

- 张三制定第一阶段的分配方案, 具有"先手优势".
- "先手优势"存在的原因:
  - 李四并不想拖入第二阶段, 否则李四的效用会按照 δ 的比例进行折旧.
  - 张三知道这一点, 因此可以在第一阶段逼迫李四接受并不完全公平的分配方案.

Patience is power

- 一般认为, δ 衡量行为人的 耐心程度 (patience), 或意志力程度(willpower).
  - 从效用的角度来看, 明天的 100 块巧克力等价于今天的 100δ 块巧克力.
  - 意志力强的人, δ 也会更高.
  - 如果行为人具有完美意志力, 他会对明天的 100 块巧克力和今天的 100 块巧克力无差异. 此时, $\delta = 1$.
- 均衡结果中, 李四的收益为 50δ. 他的均衡收益随着意志力(或耐心)的上升而上升.
  - 如果李四具有完美意志力 ($\delta = 1$), 就能免于张三的剥削!

延迟满足 (Delayed gratification)

延迟满足能力, 指为了更有价值的**长远结果**而放弃**即时满足**. (心理学概念)

> Delayed gratification means resisting the temptation of an immediate reward, in anticipation that there will be a greater reward later.

如何训练自己延迟满足的能力?

- 有意识地感知到自己会倾向于及时满足, 并愿意为了长远目标而作出改变, 就迈出了提高延迟满足能力的第一步.
- 使用延迟满足会消耗你的意志力 (willpower). 意志力是一种稀缺资源. 当觉得自己意志力低下时, 应该有意识地回避充满诱惑的环境, 并**策略性地使用自己有限的意志力.**

练习: 阅读教材 P94, 自行求解这个"三期讨价还价博弈"的逆向归纳解, 并和教材的答案进行比较.

劳资博弈

博弈模型设定

参与人: 工会和厂商

行动集: 工会决定工资 $W \in [0, \infty)$, 厂商决定雇佣人数 $L \in [0, \infty)$.

两阶段博弈:

1. 工会选择工资 W
2. 厂商选择雇佣人数 L

效用函数

- 工会效用: $u(W, L)$, u 关于 W 和 L 均递增.
- 厂商利润: $\pi(W, L) = R(L) - WL$, 其中 $R(L)$ 为**产出**, WL 为雇佣成本.
- 假设 $R(L)$是严格递增的严格凹函数:
  - $R'(L) > 0$, $R''(L) < 0$, 且 $R(0) = 0$.
- 数值例子:
  - $u(W, L) = W^{0.5}L^{0.5}$
  - $R(L) = 5L - L^2$ for $L \in [0, 2.5]$.

逆向归纳: 第二阶段

厂商观察到工会选择的工资 W 后, 解决如下最优化问题:

$$\max_{L} R(L) - WL$$

一阶条件:

$$R'(L) = W \implies 5 - 2L = W \quad (*)$$

- 方程 $(*)$ 决定了厂商的雇佣策略: $L^*(W) = (5 - W)/2$.

逆向归纳: 第一阶段

- 给定厂商的雇佣策略 $L^*(W) = (5 - W)/2$, 工会的最优化问题如下:

$$\max_{W} u(W, L^*(W)) = W^{0.5}(\frac{5 - W}{2})^{0.5}$$

- 这个最优化问题的解为: $W^* = 2.5$.

劳资博弈: 均衡与均衡结果

均衡:

- 工会策略: $W^* = 2.5$
- 厂商策略: $L^*(W) = (5 - W)/2$

均衡结果:

- 工会的行动为 $W^* = 2.5$
- 厂商的行动为 $L^*(2.5) = 5/4$

从逆向归纳到子博弈精炼

- 目前为止, 我们主要分析了**两阶段动态博弈**的例子. 我们使用的求解方法 (**逆向归纳**) 可以推广到任意有限期动态博弈.
- 逆向归纳法对无穷期博弈不适用 (无穷期博弈的例子见教材 P96)
  - 原因: 逆向归纳法的分析起点是博弈的最后一期, 然后再进一步倒推之前的均衡结果. 但是, 无穷期博弈不存在最后一期. 因此, 逆向归纳法不适用.
- 对于无穷期博弈, 只能使用**子博弈精炼**的方法 (下一讲介绍)

- 尽管子博弈精炼法比逆向归纳法适用范围更广, 但它的优势主要体现在无穷期博弈.
    - 我们这门课程几乎不会涉及到无穷期博弈, 教材 P96 给了一个相对简单的无穷期博弈例子, 但教材给的解答并不严格.
    - 无穷期博弈的求解较难, 需要使用特定的数学工具.
- 对于有限期博弈, 逆向归纳法和子博弈精炼 "几乎"是等价的. 并且, 逆向归纳法比子博弈精炼更容易理解.
- 因此, 我们重点掌握逆向归纳法. 教材中本章涉及的所有博弈例子 (斯塔克博格模型, 劳资博弈, 讨价还价博弈, 委托-代理博弈等) 都可以用逆向归纳法求解.