完全信息静态博弈, 严格劣势策略

授课教师: 雷浩然

湖南大学课程

Roadmap

- 本讲介绍**完全信息静态博弈**的一般表述.
- 用**囚徒困境**为例, 引出**严格劣势策略**这一概念.
- 最后, 我们介绍"重复剔除严格劣势策略"这一概念, 并给出政治经济学中著名的中间选民定理.

严格劣势策略(也可以简称为严格劣策略)是本讲的核心概念.

完全信息静态博弈

静态博弈 = 同时行动博弈。三个基本元素:

- 参与人
- 行动集合
- 效用函数

完全信息静态博弈

静态博弈 = 同时行动博弈。三个基本元素:

- 参与人
- 行动集
- 效用函数

之后我们在介绍动态博弈和不完全信息时，会引入两个新元素：**策略**和**信息集**。

- 对于完全信息静态博弈，暂时不用引入这两个元素.

参与人

- **参与人**指的是博弈中的决策主体，它的目的是通过选择行动（或策略）以最大化自己的效用水平
- 经济博弈中的参与人：
  - 消费者，投资者，企业、国家或由若干国家组成的集团
- 数学符号：
  - 参与人构成集合 $N = \{1, \ldots, n\}$
  - 参与人1，参与人2,..., 参与人 n
- 例子：$N = \{$张三, 李四$\}$

行动集

- 对于参与人 i, 用集合 A_i 表示其**行动集**
- 参与人 i 的某个**行动**记为 $a_i \in A_i$

例：石头剪刀布博弈的行动集 $A_1 = A_2 = \{石头,剪刀, 布\}$

- 石头剪刀布博弈的 **结果** 表示为向量 $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$
  - $A_1 \times A_2$ 为笛卡尔积（Cartesian product）.
  - 石头剪刀布的可能结果有 $3 \times 3 = 9$ 种.

效用函数

- 参与人 i 的效用函数 u_i: 博弈结果到实数的映射

$$u_i : A_1 \times \ldots A_n \to \mathbb{R}$$

- 例: 剪刀石头布博弈, 获胜时收益为 1, 失败收益为 -1, 平局为 0

效用函数

- 参与人 i 的效用函数 u_i: 博弈结果到实数的映射

$$u_i : A_1 \times \ldots A_n \to \mathbb{R}$$

- 例: 剪刀石头布博弈, 获胜时收益为 1, 失败收益为 -1, 平局为 0

博弈的基本特征: 参与人 1 的最终收益不仅取决于他自己的决策 a_1, 还取决于其他参与人的决策: $a_2, a_3, \ldots$

- 我们称这个现象为**策略性互动** (strategic interaction), 或参与人的收益存在"互相依赖"
- 这个概念很类似**外部性**

例: 囚徒困境

囚徒困境

- 囚徒困境是**完全信息同时行动博弈**
- 两位犯罪嫌疑人 (张三和李四) 被警方分离开, 单独审问
- 面对警方询问, 犯罪嫌疑人会选择**合作** (抵赖)或**背叛** (坦白)
  - 若两人都选择合作, 则两人均 "拘留7天"
  - 若张三选择合作, 而李四背叛. 则张三判刑 5 年,李四无罪释放
  - 若两人都选择背叛, 则两人均判刑 1 年

囚徒困境: 博弈描述

- 行为人: $N = \{1, 2\}$. 张三是行为人 1,李四是行为人 2
- 行动集: $A_1 = A_2 = \{$坦白, 抵赖$\}$

囚徒困境: 博弈描述

- 行为人: $N = \{1, 2\}$. 张三是行为人 1,李四是行为人 2
- 行动集: $A_1 = A_2 = \{$坦白, 抵赖$\}$
- 问: 效用函数该如何描述?

张三 \ 李四	坦白	抵赖
坦白	(1 年，1 年)	(无罪，5 年)
抵赖	(5 年，无罪)	(7 天，7天)

囚徒困境: 博弈描述

- 行为人: $N = \{1, 2\}$. 张三是行为人 1,李四是行为人 2
- 行动集: $A_1 = A_2 = \{$坦白, 抵赖$\}$
- 效用函数表示为如下收益矩阵:

张三 \ 李四	坦白	抵赖
坦白	(-5, -5)	(0, -8)
抵赖	(-8, 0)	(-1, -1)

- 如果你是张三, 你的选择是？

严格劣势策略

- 若李四选则**坦白**, 张三选择坦白和抵赖的收益分别为: $-5, -8$
- 若李四选则抵赖, 张三选择坦白和抵赖的收益分别为: $0, -1$

严格劣势策略

- 若李四选则**坦白**, 张三选择坦白和抵赖的收益分别为: $-5, -8$
- 若李四选则**抵赖**, 张三选择坦白和抵赖的收益分别为: $0, -1$

结论: 张三应该选**坦白**, 不应该选**抵赖**.

- 因为无论李四的选择是什么, **坦白**的收益都大于**抵赖**的收益.
- **抵赖** 是张三的严格劣势策略
    - 注: 对于完全信息同时行动博弈, "策略"是"行动"的同义词
    - 但是, 我们一般不说劣势行动, 只说**劣势策略**. 具体原因等之后学习动态博弈时再说明.

练习: 寻找严格劣势策略 (如果有的话)

1 \ 2	左	右
上	$(1, 0)$	$(-1, -3)$
下	$(-3, -1)$	$(0, 1)$

1 \ 2	左	右
上	$(1, 0)$	$(1, -3)$
下	$(-3, -1)$	$(0, 1)$

答案

- 第一个博弈中, 双方参与人均不存在严格劣势策略
- 第二个博弈中, 参与人 1 存在严格劣势策略, 参与人 2 不存在.

最优反应和严格劣策略

对于两人博弈, 给定参与人 2 的行动 $a_2 \in A_2$, 若此时行动 a_1^* 最大化了参与人 1 的效用函数, 我们称 a_1^* 是对 a_2 的最优反应.

例: 对于石头剪刀布博弈,

- 给定李四的行动为 $a_2 =$ 剪刀, 张三的最优反应为石头; 给定李四的行动为 $a_2 =$ 石头, 张三的最优反应为布.

最优反应和严格劣策略

对于两人博弈, 给定参与人 2 的行动 $a_2 \in A_2$, 若此时行动 a_1^* 最大化了参与人 1 的效用函数, 我们称 a_1^* 是对 a_2 的最优反应.

例: 对于石头剪刀布博弈,

- 给定李四的行动为 $a_2 =$ 剪刀, 张三的最优反应为石头; 给定李四的行动为 $a_2 =$ 石头, 张三的最优反应为布.

命题: 如果行动 a_1 是对某个行动 a_2 的最优反应, 那么 a_1 不可能是严格劣策略.

- 该命题的反命题不真. 即使行动 a_1 对任意参与人 2 的行动 $a_2 \in A_2$ 都不是最优反应, a_1 仍然可能不是严格劣策略.

寻找严格劣策略 (如有):

	C1	C2	C3
R1	4，3	5，1	6，2
R2	2，1	8，4	3，6
R3	3，0	9，6	2，8

寻找参与人 1 的严格劣策略:

- 给定 C1, R1 是 C1 的最优反应, 排除R1;
- 给定 C2, R3 是 C2 的最优反应, 排除R3;
- 给定 C3, R1 是 C3 的最优反应. 只有 R2 可能是参与人 1 的严格劣策略.
- 但是, R2 仍然不是严格劣策略
    - 给定 C2, R2 优于 R1; 给定 C3, R2 优于 R3.

寻找参与人 1 的严格劣策略:

- 给定 C1, R1 是 C1 的最优反应, 排除R1;
- 给定 C2, R3 是 C2 的最优反应, 排除R3;
- 给定 C3, R1 是 C3 的最优反应. 只有 R2 可能是参与人 1 的严格劣策略.
- 但是, R2 仍然不是严格劣策略
    - 给定 C2, R2 优于 R1; 给定 C3, R2 优于 R3.

寻找参与人 2 的严格劣策略:

- C1 是 R1 的最优反应. C3 是 R2 的最优反应.
- 检查 C2: 它严格劣于 C3.

严格劣势策略: 定义

对于两人博弈, 若参与人 1 存在两个策略 $a_{优}$ 和 $a_{劣}$ 使得

$$u_1(a_{优}, a_2) > u_1(a_{劣}, a_2) \quad \forall a_2 \in A_2$$

我们称策略 $a_{优}$ **严格优于** $a_{劣}$, 并称 $a_{劣}$ 是参与人 1 的**严格劣势策略**.

严格劣势策略: 文字定义

1. 对于参与人 i, 若无论其他参与人选择何种策略, 策略 $a_{优}$ 带给参与人 i 的效用都严格大于策略 $a_{劣}$ 带来的效用, 则称$a_{优}$ **严格优于** $a_{劣}$.
2. 对于参与人 i, 策略 a_i 是参与人 i 的**严格劣势策略**当且仅当存在另外一个策略 a_i' 使得 a_i' 严格优于 a_i.

练习: 对于两人博弈, 若策略 a_2 是参与人2的严格劣势策略, 请描述对应的不等式关系.

练习: 对于两人博弈, 若策略 a_2 是参与人2的严格劣势策略, 请描述对应的不等式关系.

存在某个参与人2的策略 a_2', 使得下列的不等式对所有参与人1的策略a_1 都成立:

$$u_2(a_1, a_2') > u_2(a_1, a_2) \quad \forall a_1 \in A_1$$

劣势策略: 定义 (暂时了解即可)

对于两人博弈, 若参与人 1 存在两个策略 $a_{优}$ 和 $a_{劣}$, 使得

1. $u_1(a_{优}, a_2) \geq u_1(a_{劣}, a_2) \quad \forall a_2 \in A_2$
2. 存在某个参与人2的策略 a_2' 使得不等式严格成立: $u_1(a_{优}, a_2') > u_1(a_{劣}, a_2')$

我们称策略 $a_{优}$ **优于** $a_{劣}$, 并称 $a_{劣}$ 是参与人 1 的**劣势策略**.

如果某个劣势策略 $a_{劣}$ 不是**严格劣势策略**, 称它为**不严格劣势策略**

劣势策略: 文字定义

定义1: 对于参与人 i, 若

1. 无论其他参与人选择何种策略, 策略 $a_{优}$ 带给参与人 i 的效用都大于或等于策略 $a_{劣}$ 带来的效用;
2. 存在某个其他参与人的策略组合, 使得策略 $a_{优}$ 带给参与人 i 的效用严格大于 $a_{劣}$ 带来的效用,

则称$a_{优}$ **优于** $a_{劣}$.

定义2: 对于参与人 i, 策略 a_i 是参与人 i 的**劣势策略**当且仅当存在另外一个策略 a_i' 使得 a_i' 优于 a_i.

剔除严格劣势策略

- 博弈论的研究目标之一, 是给出模型中参与人行为的**预测**.
- 一个基本预测: **理性参与人**永远不会选择严格劣势策略.
  - 因此, 我们可以将所有的严格劣势策略从分析中剔除!
  - 对于囚徒博弈, 双方行为人都不选 抵赖. 因此, 最终的博弈结果一定是双方都选择坦白.

练习: 剔除严格劣势策略

1 \ 2	左	右
上	(1, 0)	(1, -3)
下	(-3 , -1)	(0, 1)

练习: 剔除严格劣势策略

1 \ 2	左	右
上	(1, 0)	(1, -3)
下	(-3 , -1)	(0, 1)

- 在原始博弈中, 参与人 2 不存在严格劣势策略.
- 剔除了参与人 1 的严格劣势策略 ("下") 之后呢?
  - **重复剔除严格劣势策略**
  - 给定参与人 1 选 "上", 参与人 2 会选 "左".

以下仍然以两人博弈为例说明**重复剔除严格劣策略**:

0. 张三和李四的可选策略分别记为: $\{a_{11}, \ldots, a_{1m}\}$, $\{a_{21}, \ldots, a_{2n}\}$
1. 剔除张三和李四的严格劣策略, 记两人剩下的可选策略为: $\{a'_{11}, \ldots, a'_{1m'}\}$, $\{a'_{21}, \ldots, a'_{2n'}\}$.

   经过一轮剔除后, 李四剩余的策略变少. 这时, 给定李四的所有可能策略, 我们可以继续剔除张三剩余策略中的严格劣策略 (如有).
2. 剔除张三和李四的严格劣策略.
3. ...
4. 重复以上过程, 直至无法剔除更多的策略为止.

重复剔除严格劣策略: 练习

	C1	C2	C3
R1	4，3	5，1	6，2
R2	2，1	8，4	3，6
R3	3，0	9，6	2，8

练习1答案

先剔除C2，再剔除R2,R3，最后剔除C3

重复剔除严格劣策略: 练习2

	C1	C2	C3
R1	2，12	1，10	1，12
R2	0，12	0，10	0，11
R3	0，12	0，10	0，13

练习2答案

剩余策略: R1, C1和C3.

练习2答案

剩余策略: R1, C1和C3.

使用重复剔除严格劣策略, 无法给出博弈结果的唯一预测.

- 我们只知道张三会使用 R1
- 我们无法判断李四会用 C1 还是 C3.
- 存在两种可能的博弈结果: (R1,C1), (R1,C3)

问: 你觉得在真实博弈中, (R1,C1) 和 (R1,C3) 哪种结果更可能出现?

上一个练习还说明了, 使用重复剔除严格劣策略, 不一定能得到关于博弈结果的唯一预测.

这个事实其实很显然. 对于石头剪刀布博弈, 双方参与人均不存在严格劣策略, 这时重复剔除法就无法起到任何作用.

小结

以下内容是你需要掌握的:

- 策略 a_i **严格优于**策略 a_i' 的数学定义 + 文字定义
- 策略 a_i 是**严格劣势策略**的数学定义 + 文字定义
- 策略 a_i **优于**策略 a_i' 的文字定义
- 给定一个博弈, 如何寻找参与人的严格劣势策略.
- 使用**重复剔除严格劣策略**来预测博弈结果