Ch2: 最优反应, 优势策略

授课教师: 雷浩然

湖南大学课程

上一讲的核心概念: **严格劣势策略** 和 **重复剔除严格劣势策略(重复剔除法)**.

- 严格劣势策略是一类"坏策略". 理性的参与人永远不会选择严格劣势策略.
- 我们可以反复剔除这些"坏策略", 直至博弈中不存在"坏策略"为止.
    - 这种方法叫作**重复剔除法**, 它可以用来预测博弈结果
    - 某些教科书上, 会将重复剔除法给出的预测称为 **重复剔除均衡**.

对于部分博弈 (如囚徒困境, "中间选民定理"), 重复剔除法预测的博弈结果是唯一的. 也就是说, 这类博弈存在唯一的重复剔除均衡.

- 对于部分博弈, 使用重复剔除法无法得到唯一的预测结果. 比如, 对于不存在严格劣势策略的博弈 (石头剪刀布), 重复剔除法完全不适用.

上一讲的核心概念: **严格劣势策略** 和 **重复剔除严格劣势策略(重复剔除法)**.

- 严格劣势策略是一类"坏策略". 理性的参与人永远不会选择严格劣势策略.

本讲的核心概念: 最优反应, 优势策略. (它们都是某种意义上的"好策略")

最优反应

考虑如下两人同时行动博弈:

- 参与人: $N = \{1, 2\}$
- 行动集: A_1, A_2
- 效用函数: $u_1(a_1, a_2)$, $u_2(a_1, a_2)$

最优反应

考虑如下同时行动博弈:

- 参与人: $N = \{1, 2\}$
- 行动集: A_1, A_2
- 效用函数: $u_1(a_1, a_2), u_2(a_1, a_2)$

定义: 给定参与人2的行动 a_2, 若行动 $a_1^* \in A_1$ 最大化了参与人 1 的效用, 则称 a_1^* 是对 a_2 的**最优反应**.

- 例: 给定李四的行动 $a_2 =$ 石头, 张三的最优反应: $a_1^* =$ 布

对于两人有限博弈 (即可以用一个收益矩阵来描述的博弈), 我们一般用**下划线**来标出参与人的**最优反应**.

张三\李四	左	中	右
上	1 , 0	1 , 3	0 , 1
下	0 , 4	0 , 2	2 , 0

下划线表示最优反应

$\underline{1}$, 0	$\underline{1}$, $\underline{3}$	0, 1
0, $\underline{4}$	0, 2	$\underline{2}$, 0

最优反应: 约会博弈

张三 \ 李四	网吧	商场
网吧	$(2, 1)$	$(0, 0)$
商场	$(0, 0)$	$(1, 2)$

最优反应: 约会博弈

张三 \ 李四	网吧	商场
网吧	$(2, 1)$	$(0, 0)$
商场	$(0, 0)$	$(1, 2)$

张三 \ 李四	网吧	商场
网吧	$(\underline{2}, \underline{1})$	$(0, 0)$
商场	$(0, 0)$	$(\underline{1}, \underline{2})$

最优反应: 数学描述

给定行为人2的策略 $a_2 \in A_2$, 若行为人1的策略 $a_1^* \in A_1$ 满足下列不等式:

$$u_1(a_1^*, a_2) \geq u_1(a_1, a_2) \quad \forall a_1 \in A_1$$

则称 a_1^* 是对 a_2 的**最优反应**.

- 换言之, a_1^* 是对 a_2 的最优反应, 当且仅当 a_1^* 是如下优化问题的解:

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, a_2)$$

注: 这两个最优反应的定义和前面用文字描述的定义是等价的. 第一个定义是不等式描述, 第二个定义用到了 最优化 (optimization) 的数学语言.

练习. 说明并对比下面两个定义:

1. a_1 是张三的**严格劣势策略**.
2. 针对李四的策略 a_2, 张三的**最优反应**是a_1.

练习. 说明并对比下面两个定义:

1. a_1 是张三的**严格劣势策略**.
2. 针对李四的策略 a_2, 张三的**最优反应**是a_1.

第一个定义说的是, 存在某个张三的策略 a_1', 使得无论李四采取何种策略, a_1 带给张三的效用都严格小于 a_1' 带给张三的效用.

第二个定义说的是, 给定李四的策略 a_2, 策略 a_1 最大化了张三的效用.

判断正误

1. 如果 a_1 是张三的劣势策略, 那么 a_1 不可能是张三的最优反应.

判断正误: 答案

1. 如果 a_1 是张三的劣势策略, 那么 a_1 不可能是张三的最优反应. ❌

下例中, "上"是张三的劣势策略. 给定李四选 "左", "上"是张三的最优反应.

```
张三\李四     左         右
上           (1,0)     (1,-1)
下           (1,1)     (2,-2)
```

判断正误

2. 如果 a_1 是张三的严格劣势策略, 那么 a_1 不可能是张三的最优反应.

判断正误

2. 如果 a_1 是张三的严格劣势策略, 那么 a_1 不可能是张三的最优反应. ✅

证明 (反证法). 反设存在某个李四的策略 a_2, 使得 a_1 是张三的最优反应. 也就是说,

$$u_1(a_1, a_2) \geq u_1(\tilde{a}_1, a_2) \quad \forall \tilde{a}_1 \in A_1. \quad (1)$$

由于 a_1 是张三的严格劣势策略, 存在某个策略 $a_1^{'}$ 使得

$$u_1(a_1, a_2) < u_1(a_1^{'}, a_2) \quad (2)$$

(1)式和(2)式矛盾.

优势策略

最优反应是个"好策略", 但它针对的是某个具体的其他行为人的策略.

如果张三存在某个策略 a_1^*, 它对于**所有李四可能的行动**都是最优反应. 我们称满足这个条件的 a_1^* 为张三的**优势策略** (dominant strategy).

优势策略

最优反应是个"好策略", 但它针对的是某个具体的其他行为人的策略.

如果张三存在某个策略 a_1^*, 它对于**所有李四可能的行动**都是最优反应. 我们称满足这个条件的 a_1^* 为张三的**优势策略** (dominant strategy).

定义: 对于两人博弈, 若存在某个行为人1的策略 a_1^*, 使得下列不等式对任意 $a_1 \in A_1$ 和 $a_2 \in A_2$ 都成立:

$$u_1(a_1^*, a_2) \geq u_1(a_1, a_2)$$

则称a_1^* 为张三的**优势策略**.

理解优势策略

- 优势策略是"几乎完美"的策略:
  - 如果张三存在优势策略 a_1^*, 那么张三不用去思考李四的策略或偏好, 也不用去思考李四有没有私人信息或者李四是不是理性的. 张三只用选 a_1^* 就行, 因为无论李四最终的选择是什么, a_1^* 都是张三的最优反应.
- 优势策略的例子:
  - 囚徒困境中选则坦白
  - 二价拍卖 (我们会在之后的不完备信息博弈中介绍)

优势策略均衡

- **优势策略均衡:** 每个参与人都选择他自己的优势策略.
  - 例: 囚徒困境, (坦白, 坦白)

```
张三 \ 李四       坦白              抵赖
坦白          (-5, -5)          (0, -8)
抵赖          (-8,  0)          (-1, -1)
```

(坦白, 坦白) 既是优势策略均衡, 也是重复剔除均衡.

优势策略均衡

- **优势策略均衡:** 每个参与人都选择他自己的优势策略.
  - 例: 囚徒困境, (坦白, 坦白)

```
张三 \ 李四      坦白              抵赖
坦白          (-5, -5)         (0, -8)
抵赖          (-8,  0)         (-1, -1)
```

(坦白, 坦白) 既是优势策略均衡, 也是重复剔除均衡.

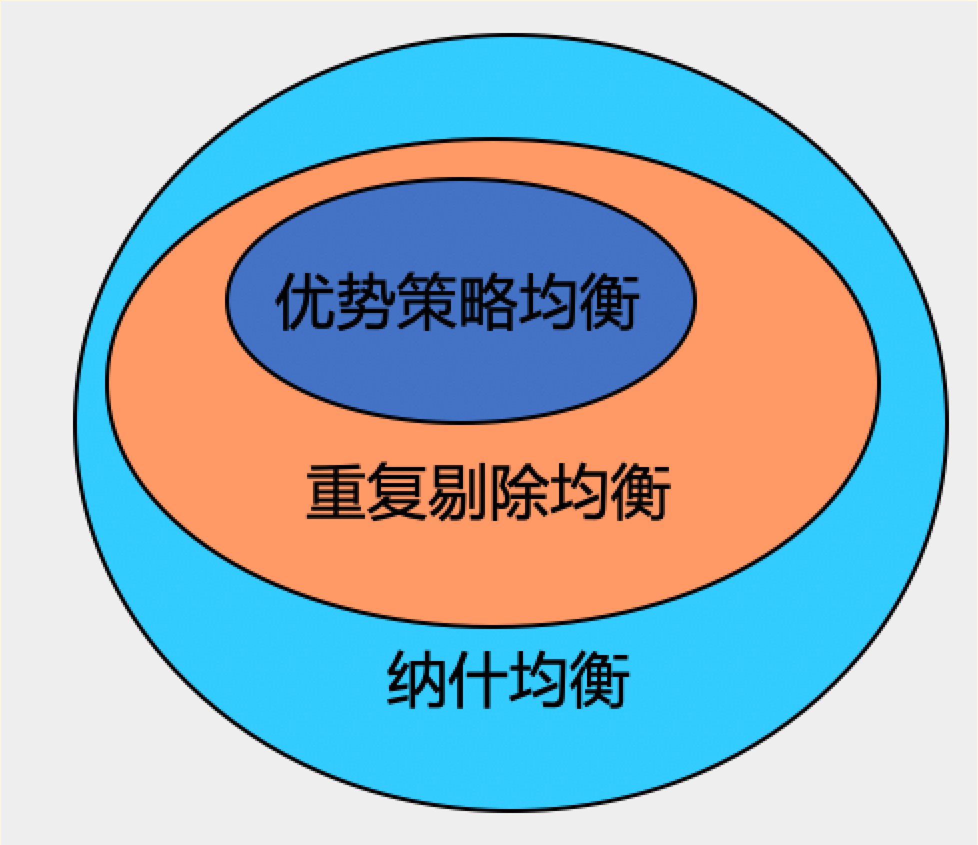
命题. 如果一个策略组合 (a_1, a_2) 是优势策略均衡, 那么 (a_1, a_2) 也一定是重复剔除均衡. 反之不真.

- 这个命题的证明较复杂. 同学们知道这个命题成立即可.

从优势策略均衡到纳什均衡

- 优势策略均衡不是普遍存在的.
  - 比如约会博弈和选民博弈, 行为人都没有优势策略.
- 如果我们不要求策略组合 (a_1, a_2) 中的每个策略都是优势策略, 只要求 a_1 和 a_2 都是针对其他参与人策略的最优反应, 我们就得到了**纳什均衡**.
- 对于有限博弈 (参与人数量有限, 每个参与人的策略有限), 纳什均衡一定存在. (**纳什定理**)

优势策略均衡 ⊂ 重复剔除均衡 ⊂ 纳什均衡



纳什均衡: Nash (1950) 和 Nash (1951)

John Nash (1950): "Equilibrium points in n-person games"

- 在这篇论文中, Nash 提出均衡的概念, 并用 **Kakutani 不动点定理**证明了均衡的存在性.
- 课程网站提供了论文的 PDF. 全文仅一页
- 后人将这种均衡称为**纳什均衡**, 均衡的存在性定理称为**纳什定理**.

在随后的一篇更正式的论文中, Nash 给出了一个均衡存在性的简化证明 (主要工具是 **Brouwer 不动点定理**), 以及纳什均衡在扑克牌游戏中的应用.

- John Nash (1951): "Non-cooperative games". 全文十页