混合策略

授课教师: 雷浩然

湖南大学课程

混合策略

- 考虑两人博弈: $N = \{$张三, 李四$\}$. 张三的行动集为 $A_1 = \{a_{11}, \ldots, a_{1m}\}$.
- 在此前的分析中, 我们假设张三会以概率 1 选择某个特定的行动 $a \in A_1$.
- 实际博弈中, 张三可以按照某个 **概率分布** $\mathbf{p}_1 = (p_{11}, \ldots, p_{1m})$ 来随机化他的最终选择, 其中 p_{1k} 表示张三最终选择为 a_{1k} 的概率.

$$p_{11} + p_{12} + \cdots + p_{1m} = 1$$
$$0 \leq p_{1k} \leq 1, \forall k \in \{1, \ldots, m\}$$

混合策略: 猜硬币博弈

张三\李四	正面	反面
正面	$(-1,1)$	$(1,-1)$
反面	$(1,-1)$	$(-1,1)$

张三选择硬币的正面和反面, 李四猜张三的决定.

张三的策略可以表示为 $(p, 1-p)$:

- $p \in (0,1)$ 为张三选择"正面"的概率, $1-p$ 为张三选择"反面"的概率.
- 当 $p=0$ 或 $p=1$ 时, 张三的混合策略退化为**纯策略**.

概率分布: 离散型和非离散型

- 如果张三的**行动集是有限**的, 他的混合行动对应的概率分布是**离散型**的.
  - 对于离散型的概率分布, 我们一般用向量表示如下:

$$p_1 = (p_{11}, \ldots, p_{1m})$$

- 如果张三的**行动集是无限**的, 他的混合行动对应的概率分布可能非常复杂:
  - 可能是连续型 (比如, 在某个区间上连续分布);
  - 可能是半离散-半连续型.
  - 这门课程里, 当参与人的行动集是无限时, 我们只讨论纯策略纳什均衡 (例: 古诺博弈均衡, 伯特兰博弈均衡).

期望效用

- 若行为人的策略是随机的, 博弈的可能结果也是随机的.
- 这时, 行为人的目标是最大化他的**期望效用**.
- 计算期望效用: 将每个可能博弈结果中的效用依概率加权求和.

计算期望效用: 猜硬币博弈

令张三和李四的混合策略分别为 $(p, 1-p)$ 和 $(q, 1-q)$.

最终博弈结果的概率分布如下表所示:

张三\李四	正面。q	反面。$(1-q)$
正面。p	$(-1, 1)$。pq	$(1, -1)$。$p(1-q)$
反面。$(1-p)$	$(1, -1)$。$(1-p)q$	$(-1, 1)$。$(1-p)(1-q)$

猜硬币博弈: 计算期望效用

令张三和李四的混合策略分别为 $(p, 1-p)$ 和 $(q, 1-q)$.

最终博弈结果的概率分布如下表所示:

张三\李四	正面。q	反面。$(1-q)$
正面。p	$(-1,1)$。pq	$(1,-1)$。$p(1-q)$
反面。$(1-p)$	$(1,-1)$。$(1-p)q$	$(-1,1)$。$(1-p)(1-q)$

张三的期望效用:

$$pq \cdot (-1) + p(1-q) \cdot 1 + (1-p)q \cdot 1 + (1-p)(1-q) \cdot (-1)$$

混合策略纳什均衡

考虑两人博弈, **混合策略纳什均衡**是一个特殊的策略组合 $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, 使得 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 互为最优反应.

- 向量 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 分别表示行为人 1 和行为人 2 的混合策略:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= (p_{11}, \ldots, p_{1m}) \\ \mathbf{p}_2 &= (p_{21}, \ldots, p_{2k})\end{aligned}$$

- 当两个策略 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 都退化到**纯策略**情形时, 混合策略纳什均衡退化为**纯策略纳什均衡**.

计算混合策略均衡: 猜硬币博弈

- 用下划线法可知, "猜硬币博弈"不存在纯策略纳什均衡
- 根据纳什定理, 这个有限博弈存在纳什均衡. $\Longrightarrow$ 存在混合策略纳什均衡
- 混合策略的分析比纯策略更复杂:
  - 张三只有两个纯策略
  - 张三有无穷多个混合策略, 每个不同的 $p \in [0,1]$ 对应不同的混合策略.

计算混合策略均衡:

- 给定李四的策略 $(q, 1-q)$, 张三选择某个最优的混合概率 p^*, 得到最优反应函数 $p^*(q)$.
- 类似地, 计算出李四的最优反应函数 $q^*(p)$. 联立方程求解均衡.

张三的最优反应

张三的期望效用:

- $U_1(p,q) = -pq + p(1-q) + (1-p)q - (1-p)(1-q)$

$$\frac{\partial U_1(p,q)}{\partial p} = 2(1-2q)$$

张三的最优反应

张三的期望效用:

- $U_1(p,q) = -pq + p(1-q) + (1-p)q - (1-p)(1-q)$

$$\frac{\partial U_1(p,q)}{\partial p} = 2(1-2q)$$

张三的最优反应:

$$p^*(q) = \begin{cases} 1 & \text{若 } q < 1/2 \\ p^* \in [0,1] & \text{若 } q = 1/2 \\ 0 & \text{若 } q > 1/2 \end{cases}$$

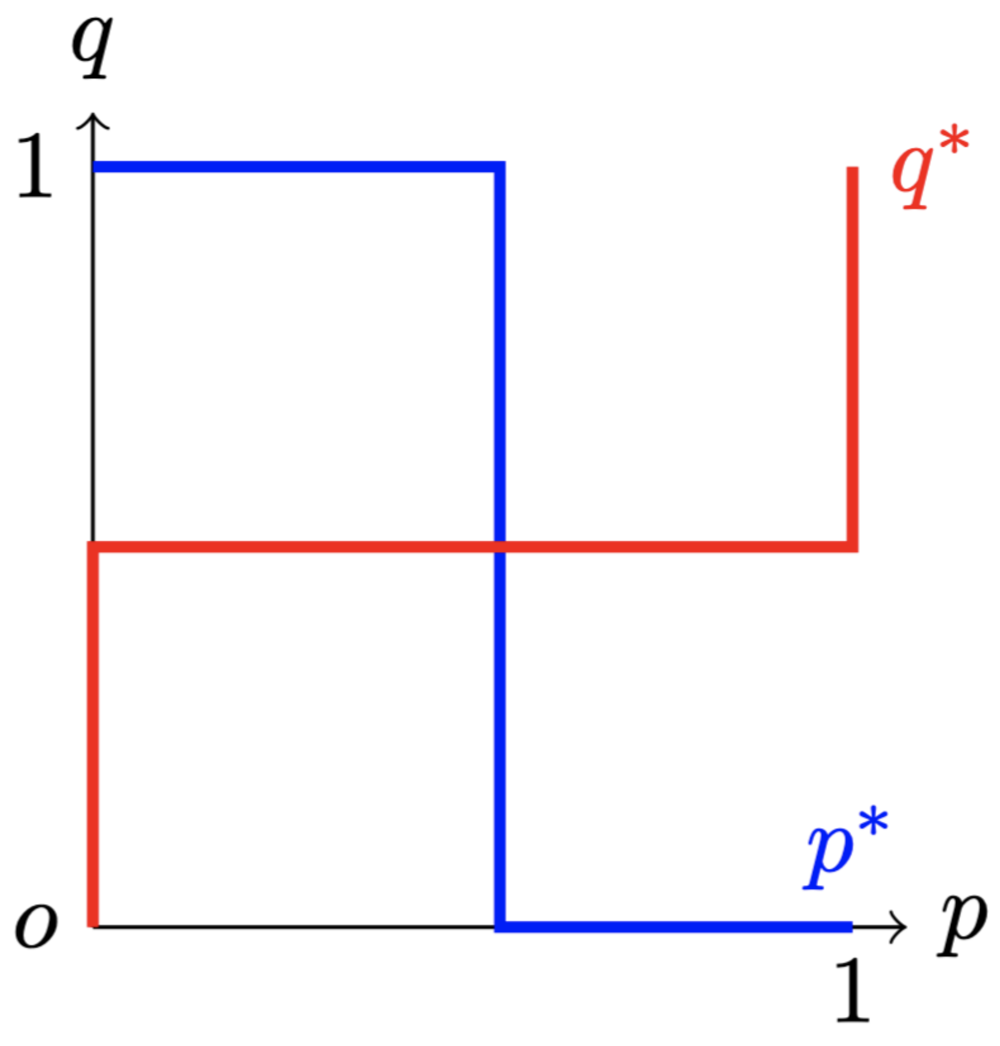
理解张三的最优反应

$$p^*(q) = \begin{cases} 1 & 若\ q < 1/2 \\ p^* \in [0,1] & 若\ q = 1/2 \\ 0 & 若\ q > 1/2 \end{cases}$$

- 若李四"猜正"的概率**小于** $1/2$, 张三的最优反应是使硬币**正面**朝上
- 若李四"猜正"的概率**大于** $1/2$, 张三的最优反应是使硬币**反面**朝上
- 若李四"猜正"的概率**等于** $1/2$, 张三对于"正"和"反"**无差异**.
  - 此时, 任何混合策略都是张三的最优反应. $\frac{\partial U_1(p,1/2)}{\partial p} = 0$

混合策略纳什均衡

- 用同样的方法, 可以求出李四的最优反应 $q^*(p)$.
- 纳什均衡由参数 $\bar{p}$ 和 $\bar{q}$ 决定:
  - $q^*(\bar{p}) = \bar{q}$
  - $p^*(\bar{q}) = \bar{p}$
- 注意: 描述纳什均衡时, 不要只答 $\bar{p}$ 和 $\bar{q}$, 而是要说明张三和李四的混合策略.
  - 张三的混合策略: $(\bar{p}, 1-\bar{p})$
  - 李四的混合策略: $(\bar{q}, 1-\bar{q})$



纳什均衡: 张三策略 (1/2, 1/2), 李四策略 (1/2, 1/2)

无差异原则

- 计算混合策略均衡的常用技巧: **无差异原则**
- 无差异原则的思想很简单:
  - 如果均衡中张三会在 a_1 和 a_1' 之间随机, 那么 a_1 和 a_1' 这两个纯策略本身就是张三的最优反应.
  - 这时, 这两个纯策略带给张三的效用肯定是相同的. 也就是说, 张三对 a_1 和 a_1' 无差异.

无差异原则

定理 (无差异原则). 如果在混合策略均衡中, 张三选择行动 a_1 和 a_1' 的概率均为正. 那么给定均衡中其他参与人的策略, 张三对 a_1 和 a_1' 这两个纯策略是无差异的.

证明思路如下:

- 均衡中, 张三选择 a_1 和 a_1' 的概率分别记为 p 和 p'.
  有: $p > 0, p' > 0, p + p' \leq 1$.
- 为简化讨论, 假设 $p + p' = 1$. 即张三只在 a_1 和 a_1' 之间随机.
- 张三偏离到纯策略 a_1 后的效用记为 u
- 张三偏离到纯策略 a_1' 后的效用记为 u'
- 张三在均衡中的期望效用: $pu + p'u' = pu + (1 - p)u'$

- 根据纳什均衡的定义:

$$pu + (1-p)u' \geq u$$

$$pu + (1-p)u' \geq u'$$

$$\implies u = u'$$

即张三对于a_1 和 a_1' 无差异. 证毕.

无差异原则的应用: 猜硬币博弈

- 记纳什均衡为: $(\bar{p}, 1-\bar{p})$ 和 $(\bar{q}, 1-\bar{q})$
- 张三对于"正面"和"背面" 无差异:

$$\bar{q} - (1-\bar{q}) = -\bar{q} + (1-\bar{q}) \implies \bar{q} = 1/2$$

- 李四对于"正面"和"背面" 无差异:

$$\bar{p} - (1-\bar{p}) = -\bar{p} + (1-\bar{p}) \implies \bar{p} = 1/2$$

约会博弈

张三\李四	网吧	商场
网吧	(2, 1)	(0, 0)
商场	(0, 0)	(1, 2)

计算混合策略均衡: $(p, 1-p)$ 和 $(q, 1-q)$.
其中 p 和 q 分别表示均衡中张三和李四去网吧的概率.

张三\李四	网吧	商场
网吧	(2, 1)	(0, 0)
商场	(0, 0)	(1, 2)

- 给定李四的策略 $(q, 1-q)$, 张三对网吧和商场无差异:
  - $2 \cdot q + 0 \cdot (1-q) = 0 \cdot q + 1 \cdot (1-q) \implies q = 1/3$
- 给定张三的策略 $(p, 1-p)$, 李四对网吧和商场无差异:
  - $1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = 0 \cdot p + 2 \cdot (1-p) \implies p = 2/3$
- 纳什均衡:
  - 张三去网吧概率为 2/3, 去商场概率为 1/3
  - 李四去网吧概率为 1/3, 去商场概率为 2/3

- 混合策略纳什均衡下的结果分布

张三\李四	网吧，1/3	商场，2/3
网吧，2/3	(2, 1)，2/9	(0, 0)，4/9
商场，1/3	(0, 0)，1/9	(1, 2)，2/9

- 混合策略均衡中, 张三和李四的期望收益均为 2/3.
    - 这个均衡结果非常低效, 两个参与人的福利都严格小于纯策略中的情形.
    - 均衡低效的原因: 均衡结果中, 参与人没有碰面的概率高达 5/9

从纳什均衡到相关均衡

- 真实的情侣约会中, 张三和李四一般会进行事前协商, 约定好双方选择"网吧"还是"商场"
- 具体的, 参与人可以通过使用某个"随机数生成器"来选择纳什均衡.
- 比如, 两人玩"猜硬币博弈". 张三胜就去网吧, 李四胜就去商场.
- 由于两人获胜的概率均为 1/2. 最后张三和李四的期望效用均为 $(3/2, 3/2)$, 这个结果严格好于混合策略纳什均衡的期望效用 $(2/3, 2/3)$.
- 我们称这样的均衡为**相关均衡**

相关均衡: 定义 (不严格)

- 当博弈中存在多个纳什均衡时, 博弈中的行为人可以**事先协商**, 约定届时会选择哪个纳什均衡.
- 如果允许参与人可以根据某个事前观测到的**信号**选择行动, 这时的均衡概念被称为**相关均衡**
    - 纳什均衡可视作相关均衡的特例. 在纳什均衡中, 参与人没有事先可观测到的信号.

相关均衡例子

- 除了情侣通过猜数字决定去网吧还是商场外, 相关均衡的另一个常见例子是**红绿灯**.
- 张三和李四驾车于十字路口交汇. 两人可以选择
  1. 停车, 让对方先走
  2. 不停.

张三\李四	停车	不停
停车	$(-1,-1)$	$(0,1)$
不停	$(1,0)$	$(-10,-10)$

相关均衡例子: 红绿灯

- 类似约会博弈, 上面这个博弈有两个纯策略均衡: (停车, 不停), (不停, 停车) 以及一个混合策略均衡.
- 现实中, 路口往往会安装红绿灯. 张三和李四会根据红绿灯这个"公共信号" 在 (停车, 不停) 和 (不停, 停车) 这两个纳什均衡之间进行选择.