纯策略纳什均衡: 无穷博弈情形

(古诺模型 + 伯特兰模型)

授课教师: 雷浩然

湖南大学课程

导言

- 对于两人博弈且**行动集有限**的情形, 可以用"下划线法"来寻找纳什均衡.
- 在这一讲里, 我们用两个例子, 来说明**行动集无穷**时寻找纳什均衡的方法.
  - 例1: 古诺模型
  - 例2: 伯特兰模型
- 这两个模型是产业组织 (Industrial Organization) 中最常用的基本模型
  - 产业组织: "研究市场在不完全竞争条件下的企业行为和市场结构，是微观经济学中的一个重要分支."
  - 博弈论是产业组织研究中最重要的理论工具. 你可以通过这一讲的学习来"略微感受" 产业组织理论的研究套路.

最优反应函数

- 对于两人有限博弈, 我们可以
  1. 先用下划线标出每个参与人所有可能的最优反应
  2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合

最优反应函数

- 对于两人有限博弈, 我们可以
  1. 先用下划线标出每个参与人所有可能的最优反应
  2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合
- 如果行为人的可能行动有无穷多个, 我们可以
  1. 先用最优反应函数来描述每个参与人所有可能的最优反应
  2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合

注: 对于无穷多可能行动的情形, 我们一般要用**微分**来求解所有可能的最优反应

用微分求解最优反应函数

- 考虑两人博弈, 张三 (行为人 1) 的效用函数为 $u_1(a_1, a_2)$.
  - 其中 a_1 是张三的行动, a_2 是李四的行动
- 对于某个给定的 a_2, 张三的最优反应等价于求解如下优化问题:

$$\max_{a_1} u_1(a_1, a_2)$$

用微分求解最优反应函数

- 考虑两人博弈, 张三 (行为人 1) 的效用函数为 $u(a_1, a_2)$.
  - 其中 a_1 是张三的行动, a_2 是李四的行动
- 对于某个给定的 a_2, 张三的最优反应等价于求解如下优化问题:

$$\max_{a_1} u_1(a_1, a_2)$$

- 对于有限博弈, 这个优化问题的解可以"一眼看出" (下划线法)
  对于无穷博弈, 我们可以用微分来计算**最优反应函数** $a_1^*(a_2)$, 它由如下一阶条件决定:

$$\frac{\partial u_1(a_1, a_2)}{\partial a_1} = 0$$

古诺模型

(寡头厂商同时定产博弈)

Antoine Augustin Cournot

- 法国哲学家, 数学家, 经济学家**古诺** (**Cournot**, 1801 — 1877)
- 古诺在 *Researches on Mathematical Principles of the Theory of Wealth* 一书中用数学模型分析了寡头市场
- 这本书出版于 1838 年, 远远早于纳什均衡的提出 (Nash, 1950).
- 但是, 用今天的眼光来看, 古诺提出的寡头市场模型中, 用到的主要工具恰恰就是纳什均衡.

古诺模型

- **参与人**: 张三钢铁厂和李四钢铁厂
- **行动**: 张三选择产量 $q_1 \in [0, \infty)$, 李四选择产量 $q_2 \in [0, \infty)$
- **效用**: 张三和李四的效用为其最终利润.
  - 假设边际成本为零.
  - 钢铁的价格由需求曲线 $P(Q)$ 决定, 其中 $Q = q_1 + q_2$ 为钢铁总产量.
    - 令 $P(Q) = 1 - Q$.
    - 由于价格不可能为负, 若 $Q > 1$, 令 $P(Q) = 0$.

最优反应函数

- 张三的利润函数 (or, 效用函数):

$$u_1(q_1, q_2) = P(Q) \cdot q_1 = (1 - q_1 - q_2)q_1$$

最优反应函数

- 张三的利润函数 (or, 效用函数):

$$u_1(q_1, q_2) = P(Q) \cdot q_1 = (1 - q_1 - q_2)q_1$$

- **求解张三的最优反应函数**: 给定 q_2, 张三的最优反应 q_1^* 最大化张三的效用

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} |_{q_1 = q_1^*} = 0$$

最优反应函数

- 张三的利润函数 (or, 效用函数):

$$u_1(q_1, q_2) = P(Q) \cdot q_1 = (1 - q_1 - q_2)q_1$$

- **求解张三的最优反应函数**: 给定 q_2, 张三的最优反应 q_1^* 最大化张三的效用

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} \Big|_{q_1 = q_1^*} = 0$$

$$\Longrightarrow 1 - q_1^* - q_2 - q_1^* = 0$$

最优反应函数

- 张三的利润函数 (or, 效用函数):

$$u_1(q_1, q_2) = P(Q) \cdot q_1 = (1 - q_1 - q_2)q_1$$

- **求解张三的最优反应函数**: 给定 q_2, 张三的最优反应 q_1^* 最大化张三的效用

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} |_{q_1 = q_1^*} = 0$$

$$\Longrightarrow \; 1 - q_1^* - q_2 - q_1^* = 0$$

- 张三的最优反应函数: $q_1^*(q_2) = (1 - q_2)/2$
  - 这个函数描述了给定李四的产量 q_2, 张三的最优反应 q_1^*

纳什均衡

- 根据对称性, 李四的最优反应函数为

$$q_2^*(q_1) = (1 - q_1)/2$$

1. 先用最优反应函数来描述每个参与人所有可能的最优反应 **(已完成)**
2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合

纳什均衡

- 根据对称性, 李四的最优反应函数为

$$q_2^*(q_1) = (1 - q_1)/2$$

1. 先用最优反应函数来描述每个参与人所有可能的最优反应 **(已完成)**
2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合
   - 纳什均衡是一组特殊的策略组合 $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$, 使得
     1. $\bar{q}_1$ 是针对 $\bar{q}_2$的最优反应
     2. $\bar{q}_2$ 是针对 $\bar{q}_1$的最优反应

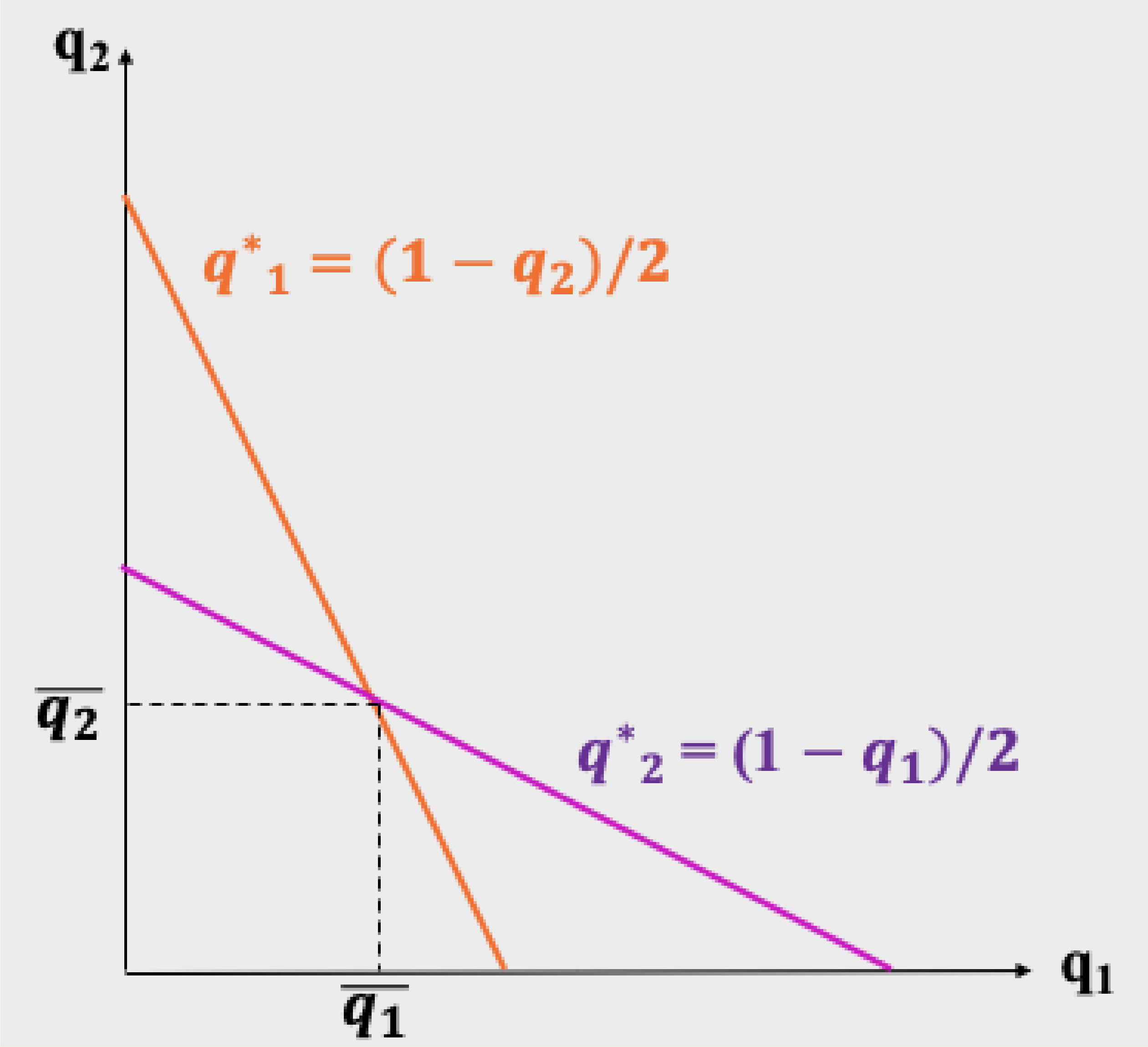
纳什均衡

- 根据对称性, 李四的最优反应函数为

$$q_2^*(q_1) = (1 - q_1)/2$$

1. 先用最优反应函数来描述每个参与人所有可能的最优反应 **(已完成)**
2. 再用纳什均衡的定义来找出对应的策略组合
   - 纳什均衡是一组特殊的策略组合 $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$, 使得
     1. $\bar{q}_1$ 是针对 $\bar{q}_2$的最优反应: $q_1^*(\bar{q}_2) = \bar{q}_1$
     2. $\bar{q}_2$ 是针对 $\bar{q}_1$的最优反应: $q_2^*(\bar{q}_1) = \bar{q}_2$
   - 联立方程:

$$(1 - \bar{q}_1)/2 = \bar{q}_2, \quad (1 - \bar{q}_2)/2 = \bar{q}_1 \implies \bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 1/3$$



纳什均衡: 图示

练习 1: 假设张三钢铁厂的初始计划产量为 $q_{10} \in (0, \frac{1}{2})$.

- 给定张三的计划产量 q_{10}, 李四的最优反应为

$$q_{20} = q_2^*(q_{10})$$

- 给定李四的计划产量 q_{20}, 张三将产量调整到对应的最优反应:

$$q_{11} = q_1^*(q_{20})$$

- 给定张三新的计划产量 q_{11}, 李四的最优反应变为

$$q_{21} = q_2^*(q_{20})$$

- 重复以上过程, 得到两组序列 $\{q_{10}, q_{11}, q_{12}, \ldots\}$, $\{q_{20}, q_{21}, q_{22}, \ldots\}$

证明: 这两个序列

$$\{q_{10}, q_{11}, q_{12}, \dots\}$$

$$\{q_{20}, q_{21}, q_{22}, \dots\}$$

会分别收敛到对应的纳什均衡产量: $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$.

- 提示: 结合最优反应的函数图像, **画图说明**即可

练习 2: 此前在求解古诺模型的均衡产量 $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ 时, 我们假设成本函数为零.

- 假设张三和李四的成本函数分别为 $C_1(q_1) = c_1 q_1$, $C_2(q_2) = c_2 q_2$, 其中 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$ 分别是张三和李四的单位成本.
- **问1:** 若 $1/2 > c_2 > c_1$, 你觉得均衡时哪家厂商的产量更高?
- **问2:** 求解这种情况下的纳什均衡, 并验证你上一问的猜想是否正确.

练习 3: 我们仍然假设成本函数为零, 但假设市场上有 $n \geq 2$家企业.

1. 计算此时每家厂商的均衡产量 $\bar{q}$, 把它表示为 n 的函数.
2. 计算均衡时每家厂商的利润 $\bar{\pi}$, 把它表示为 n 的函数.
3. 证明: $\bar{\pi}$ 关于 n 递减; 并且, 随着 n 趋于无穷, $\bar{\pi}$ 趋于零.

注. 第三小问的结论说明:

- 随着市场竞争加剧, 寡头厂商的利润会逐步下降.
- 当厂商的数量无穷多时 (即完全竞争市场情形), 厂商的定价等于其边际成本 (0), 均衡利润为零.

伯特兰模型

(寡头厂商同时定价博弈)

Joseph Louis François Bertrand

- 法国数学家, 物理学家, 经济学家伯特兰 (1822 — 1900)
- 伯特兰的父亲是医生和生物学家. 受到父亲的影响, 伯特兰九岁时就开始学习高等数学, 并且熟练掌握当时学界的通用语言(拉丁语).
- 伯特兰 11 岁时在巴黎综合理工旁听大学课程, 17 岁拿到了两个本科学位, 一个数学物理博士学位, 以及一个工程师资格证书.
- 作为学者, 伯特兰的主要贡献在微分几何, 数论, 热力学等领域.
- 今天伯特兰仍为学界所熟知, 主要是因为以他命名的两个悖论 (**伯特兰悖论**):
  - 一个悖论涉及初等概率论 (李永乐视频链接)
  - 另一个悖论就是我们即将介绍的博弈论模型.

伯特兰模型 (寡头同时定价模型)

古诺 v.s. 伯特兰

- 古诺模型中, 厂商同时选择某个产量 q
- 伯特兰模型中, 厂商同时选择某个价格 p

伯特兰模型 (寡头同时定价模型)

伯特兰模型中, 张三钢铁厂和李四钢铁厂的**效用函数**通过如下方式计算:

- 需求函数 $Q(p)$ 连续并且严格递减, 其中市场价格 p 为 p_1 和 p_2 中的较小值:
  - $p = \min\{p_1, p_2\}$
- 若张三定价 p_1 低于李四定价 p_2, 则张三垄断整个市场并获得垄断利润, 李四的利润为零.
- 若张三和李四定价相同, 则两人平分垄断利润.

张三和李四的边际成本均为 $c > 0$. 如何计算纳什均衡 $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$?

伯特兰模型: 最优反应函数

给定李四的定价 $p_2 > c$, 张三的利润 $\pi(p_1)$ 为:

$$\pi(p_1) = \begin{cases} (p_1 - c)Q(p_1) & 若\ p_1 \in [c, p_2) \\ (p_1 - c)Q(p_1)/2 & 若\ p_1 = p_2 \\ 0 & 若\ p_1 > p_2 \end{cases}$$

- 张三会比李四的定价 p_2 低一点, 但又只低一点点...
- 这时, 张三的最优反应函数不存在. 因为函数 $\pi(p_1)$ 无最大值点.

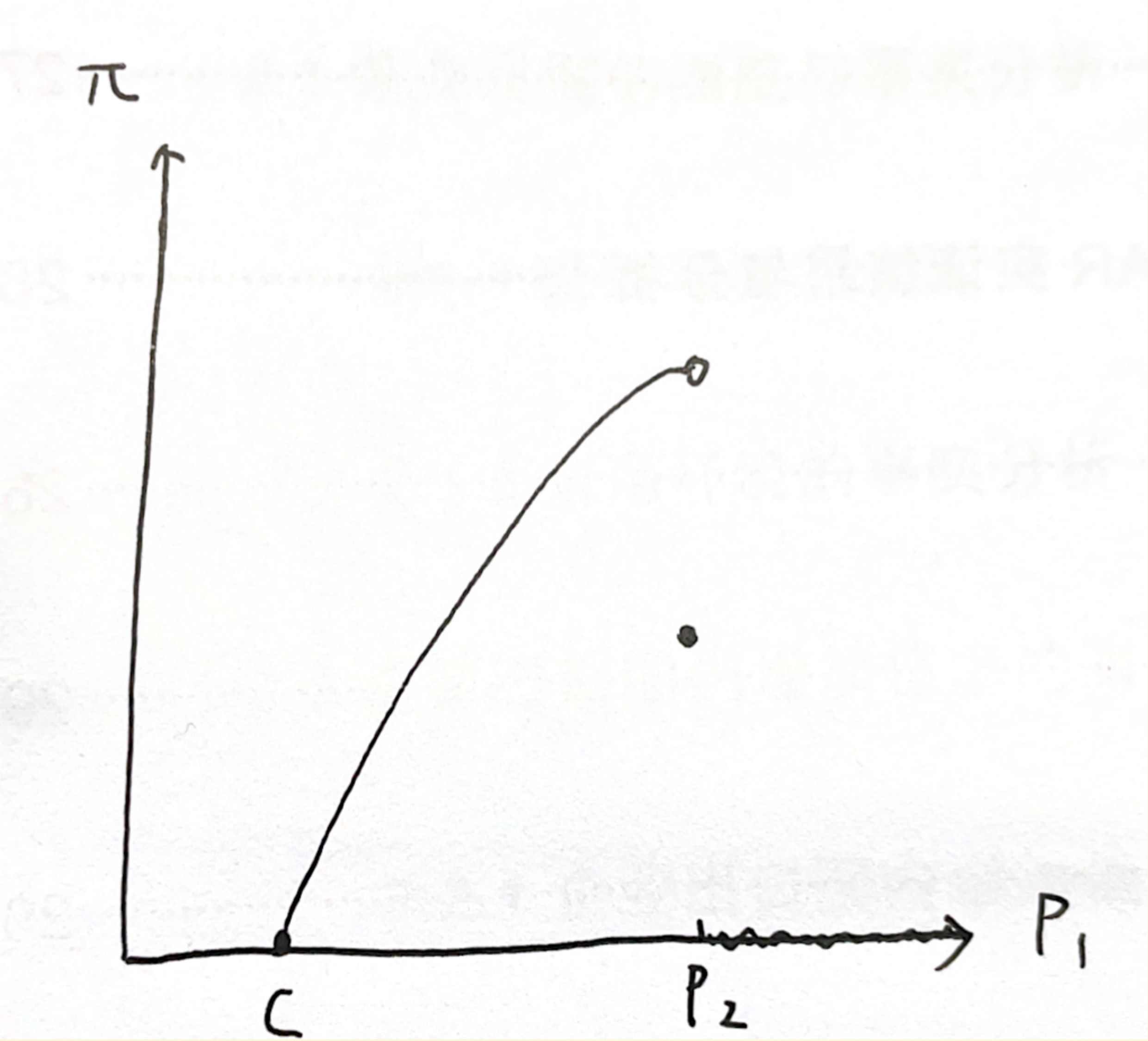
伯特兰模型: 最优反应函数

给定李四的定价 $p_2 > c$, 张三的利润 $\pi(p_1)$ 为:

$$\pi(p_1) = \begin{cases} (p_1 - c)Q(p_1) & \text{若 } p_1 \in [c, p_2) \\ (p_1 - c)Q(p_1)/2 & \text{若 } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{若 } p_1 > p_2 \end{cases}$$

- 张三会比李四的定价 p_2 低一点, 但又只低一点点...
- 这时, 张三的最优反应函数不存在. 因为函数 $\pi(p_1)$ 无最大值点.

结论. 纳什均衡中, 李四的定价不可能大于 c. 由对称性, 张三的定价也不大于 c.


π
P1
C
P2

伯特兰模型: 纳什均衡

另一方面, 厂商不可能亏本经营, 因此定价不会低于 c.

$\Longrightarrow$ (c, c) 是唯一可能的纯策略纳什均衡.

伯特兰模型: 纳什均衡

另一方面, 厂商不可能亏本经营, 因此定价不会低于 c.

$\implies (c, c)$ 是唯一可能的纯策略纳什均衡.

- 给定张三定价 c, $p_2 = c$ 是李四的最优反应? ✅
- 给定李四定价 c, $p_1 = c$ 是张三的最优反应? ✅

$\implies (c, c)$ **是纳什均衡.**

伯特兰模型: 另一种求解思路

- 不同于古诺模型, 我们无法 (i) 先用一阶条件写出最优反应 (ii) 再联立最优反应函数来求解纳什均衡.
- 这是因为, 伯特兰模型中张三的利润(效用)函数存在一个不连续点 p_2. 它导致对于任何李四的定价 $p_2 > c$, 张三的最优反应不存在.
- 对于伯特兰模型, 我们也可以绕过求解最优反应函数, 直接用"行为人是否有偏离均衡的激励" 的方式来证明 (c, c) 是唯一的纯策略纳什均衡.

定理: 伯特兰模型存在唯一的纯策略纳什均衡: $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = (c, c)$.

证明思路:

1. 证明 (c, c) 为纳什均衡.
2. 证明不存在其他纯策略纳什均衡.

定理: 伯特兰模型存在唯一的纯策略纳什均衡: $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = (c, c)$.

证明思路:

1. 证明 (c, c) 为纳什均衡. (按照纳什均衡的定义验证即可)
2. 证明不存在其他纯策略纳什均衡. (反证法)

假设 $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ 为纳什均衡.

- 均衡中, 厂商不会亏本经营. 否则, 亏本经营的厂商可以提价到 $p = c$, 从负利润变为零利润.
  - 结论1: $\min\{\bar{p}_1, \bar{p}_2\} \geq c$.
- 均衡中, 两家厂商的定价一定相同. 否则, 不妨令 $\bar{p}_1 > \bar{p}_2 \geq c$. 此时厂商 2 可以将价格从 $\bar{p}_2$ 提高到 $(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)/2$, 并获得更高的利润.
  - 结论2: $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p} \geq c$.
- 均衡中, 一定有 $\bar{p} = c$. 否则, 给定厂商 1 的定价 $\bar{p} > c$, 存在某个充分小的正数 $\varepsilon > 0$, 使得厂商 2 可以降价到 $\bar{p} - \varepsilon$, 并获得更高的利润.
  - 结论3: $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = c$ 是唯一可能的纯策略纳什均衡.

伯特兰悖论

- 相比古诺模型, 伯特兰模型只做了一个"小改动": 从同时定产变为同时定价
- 但是, 不同于古诺模型, **伯特兰模型的预测和通常的经济学直觉相差非常大**.
- 古诺模型中, 寡头厂商的均衡利润始终为正, 并且均衡利润和厂商数量 n 负相关.
  - 这和经济学原理中的直觉相符 (✅)
- 伯特兰模型中, 即使只有两家厂商, 厂商的均衡利润也为零.
  - 严重违反了经济学原理中的直觉(以及人们的日常经验) (❌)
  - 因此, 伯特兰模型的结果常常被称为"伯特兰悖论".

伯特兰悖论: 原因何在

是因为"同时定价"这个假设不符合实际么?

- 不是这个原因.
- 相比"同时定产", "同时定价"假设其实更符合现实.
    - 现实中绝大多数企业都是先制定价格, 然后根据潜在的市场需求, 来判断是进一步降价或提价.

伯特兰悖论: 原因何在

在产业组织的相关研究中, 伯特兰模型是最常用的基本模型之一 (即所谓的 workhorse model). 研究者们通常会加入如下额外假设:

- 厂商的产能有上限. 这时, 即使 $p_1 < p_2$, 厂商 1 也无法获取垄断利润, 因为产能不足 (Bertrand-Edgeworth 模型)
- 厂商的价格不是公开透明的. 消费者必须付出一定的搜寻成本, 才能得知真实的价格. (Varian, 1980: A Model of Sales)
- 两家厂商的产品存在差异性, 不能完全替代 (教材的例子, P45)
- ...

这些额外假设避免了伯特兰悖论的出现.

练习一

- 存在产品差异的伯特兰模型 (教材 P45)
- 公共资源问题 (教材 P46)

这两个博弈的纳什均衡求解方式和课上介绍的古诺模型完全相同:

1. 先用微分求解**最优反应函数**
2. 联立方程, 计算纳什均衡

请同学们自行看书, 教师不会在课堂上专门讲解这两个例子.

练习二

对于伯特兰模型, 证明下面两个命题成立.

1. 定价 $p_1 = c$ 是张三的劣势策略.
2. 定价 $p_1 = c$ 是张三的不严格劣势策略.

- 注:
  - 我们之前介绍过, 博弈的参与人在纳什均衡中不可能使用严格劣势策略, 但有可能使用劣势策略.
  - 伯特兰博弈提供了一个很好的例子: 这个博弈存在唯一的纯策略纳什均衡, 其中每个参与人的策略都是劣势策略.