# 博弈论: 作业三答案

## 判断正误 (如果回答“错”, 请说明理由)

1. 海萨尼转换通过引入参与人“自然”, 将不完美信息博弈转换成了不完全信息博弈.
   - 错误. 引入自然后, 没有信息优势的参与人将无法观测到自然的行动, 此时的博弈为不完美信息博弈.
2. 暗标拍卖中, 参与人 $i$ 的纯策略就是它的竞标价 $b_i$.
   - 错误. 参与人 $i$ 的策略是从它的估价 $v_i$ 射向竞标价 $b_i$ 的函数.

## 一价暗标拍卖

考虑包含 $n$ 个投标人的一价暗标拍卖模型. 参与人 $i$ 的私人估价 $v_i$ 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, 所有参与人的估价满足独立同分布假设. 博弈进行如下:

1. 参与人 $i$ 私下观察到自己的估价 $v_i$.
2. 所有参与人同时投标. 记参与人 $i$ 的竞标价为 $b_i \geq 0$.
3. 出价最高的参与人获得标的, 并支付它的竞标价. 如果同时存在多个最高出价, 则随机选择一位出价最高的参与人.

一. 用 $p_i$ 表示除了参与人 $i$ 的竞标价 $b_i$ 外的最高竞标价:

$$p_i = \max\{b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n\}.$$

写出参与人 $i$ 效用函数 $u_i(v_i, b_i, p_i)$ 的表达式. 不用考虑存在多个最高出价的情形 (即 $b_i = p_i$ 的情形).

$$u_i(v_i, b_i, p_i) = \begin{cases} 0 & \text{若} \quad b_i < p_i \\ v_i - b_i & \text{若} \quad b_i > p_i \end{cases}$$

二. 假设所有参与人都使用线性策略: $b(v_i) = \alpha v_i + \beta$, 其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 均为待定参数. 证明: 均衡中一定有 $\beta = 0$. (提示: 考虑参与人私人估价为 $0$ 的情形.)

答: 若所有参与人的估价均为 $0$, 线性策略下他们的竞标价均为 $b(0) = \beta$. 由于竞标价永远非负, $\beta \geq 0$. 若 $\beta > 0$, 此时随机选中的竞标成功参与人收益为负, 严格低于他报 $b = 0$ 时的收益. 因此, $\beta = 0$.

三. 给定其它参与人的策略均为 $b(v)=\alpha v$, 写出参与人 $i$ 的期望效用最大化问题. (计算期望效用时, 不用考虑存在多个最高出价的情形, 把它看成是零概率事件即可)

答: 参与人 $i$ 选择竞标价 $b_i$ 来最大化他的期望收益, 他的的最优化问题如下:

$$\max_{b_i} \Pr[b_i > p_i](v_i - b_i)$$

其中

$$\Pr[b_i > p_i] = \Pr[b_i > \max\{\alpha v_1, ..., \alpha v_{i-1}, \alpha v_{i+1}, ..., \alpha v_n\}] = \Pi_{j \neq i} \Pr\left[b_i > \alpha v_j\right]$$

对任意 $j \neq i$, $\Pr\left[b_i > \alpha v_j\right] = b_i/\alpha$. 因此参与人 $i$ 最优化问题为:

$$\max_{b_i} (v_i - b_i) \left(\frac{b_i}{\alpha}\right)^{n-1}$$

四. 计算贝叶斯纳什均衡中的系数 $\alpha$.

参与人 $i$ 最优化问题的解为

$$b_i^* = \frac{n-1}{n} v_i.$$

因此均衡中 $\alpha = \frac{n-1}{n}$.

## 二价暗标拍卖

考虑包含 $n$ 个投标人的二价暗标拍卖模型. 这个模型和上一题的唯一区别在于, 出价最高的参与人 $i$ 不需要支付他自己的竞标价 $b_i$, 只需要支付第二高的竞标价:

$$p_i = \max\{b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, ..., b_n\}$$

一. 写出参与人 $i$ 的效用函数 $u_i(v_i, b_i, p_i)$.

$$u_i(v_i, b_i, p_i) = \begin{cases} 0 & \text{若} \quad b_i < p_i \\ v_i - p_i & \text{若} \quad b_i > p_i \end{cases}$$

二. 证明: 对参与人 $i$, 给定任意 $v_i \in [0, 1]$, 竞标 $b_i = v_i$ 都是它的最优反应.

分别对 $p_i = v_i$, $p_i > v_i$ 和 $p_i < v_i$ 三种情形讨论.

1. $p_i = v_i$. 此时参与人 $i$ 竞标 $b_i < v_i$ 时无法中标, 收益为 $0$. 竞标 $b_i = v_i$ 时, 无论是否中标收益也为 $0$. 竞标 $b_i > v_i$ 时, 一定会中标并支付 $p_i$, 收益仍为零. 因此 $b_i = v_i$ 是他的最优反应.

2. $p_i > v_i$. 此时参与人 $i$ 竞标 $b_i \geq p_i$ 时期望收益均为负, 竞标 $b_i < p_i$ 时收益为 $0$. 因此 $b_i = v_i$ 是参与人 $i$ 的最优反应.
3. $p_i < v_i$. 此时参与人 $i$ 竞标 $b_i > p_i$ 时达到最大收益 $v_i - p_i > 0$. 因此 $b_i = v_i > p_i$ 是他的最优反应.

三. 在前一问的基础上, 描述二价暗标拍卖的贝叶斯纳什均衡.

- 每个参与人都如实竞标 $b_i^*(v_i) = v_i$ 构成贝叶斯纳什均衡.

## 不完全信息古诺模型

考虑双寡头古诺模型, 需求函数为 $p(Q) = a - Q$, 其中 $Q = q_1 + q_2$ 为市场总需求. 需求函数中的参数 $a$ 有两种可能的情况: $a_l$ 和 $a_h$ 且满足 $a_h > a_l$. 记 $\Pr(a = a_h) = \theta$, $\Pr(a = a_l) = 1 - \theta$. 厂商 1 私下观察到真实的 $a \in \{a_h, a_l\}$, 厂商 2 无法观察到真实的 $a$. 假设每个厂商的边际成本和固定成本均为零.

一. 描述厂商一的类型空间和它的纯策略.

- 类型空间为 $T = \{a_l, a_h\}$. 纯策略为 $s : T \to [0, \infty]$. 由于 $T$ 为有限集合, 厂商一的纯策略也可以表示为向量 $(q_h, q_l)$, 分别对应 $a_h$ 和 $a_l$ 时的产量.

二. 描述厂商二的纯策略.

- 厂商二的纯策略为产量 $q_2 \in [0, \infty)$.

三. 求解贝叶斯纳什均衡.

- 记厂商一的均衡策略为 $\left(q_h^*, q_l^*\right)$. 厂商二的均衡策略为 $q_2^*$.
- 给定厂商二的策略 $q_2^*$, $q_h^*$ 和 $q_l^*$ 应分别为如下最优化问题的解:

$$\max_{q_h} \left(a_h - q_2^* - q_h\right) q_h \Longrightarrow q_h^* = \frac{a_h - q_2^*}{2}$$

$$\max_{q_l} \left(a_l - q_2^* - q_l\right) q_l \Longrightarrow q_l^* = \frac{a_l - q_2^*}{2}$$

- 给定厂商一的策略为 $\left(q_h^*, q_l^*\right)$, $q_2^*$ 为如下最优化问题的解:

$$\max_{q_2} \theta\left(a_h - q_2 - q_h^*\right) q_2 + (1-\theta)\left(a_l - q_2 - q_l^*\right) q_2$$

$$\Longrightarrow \theta\left(a_h - 2q_2^* - q_h^*\right) + (1-\theta)\left(a_l - 2q_2^* - q_l^*\right) = 0$$

- 联立上面三个方程, 有:

$$q_l^* = \frac{1}{6}(-a_h\theta + a_l\theta + 2a_l),$$

$$q_h^* = \frac{1}{6}(-a_h\theta + 3a_h + a_l\theta - a_l),$$

$$q_2^* = \frac{1}{3}(a_h\theta - a_l\theta + a_l)$$