博弈论: 作业二答案

1. 判断正误 (如果回答 "错", 请给出一个反例)

1. 动态博弈中, 后行动的参与人可以先观察到之前参与人的行动后再决策, 因此后手总是有优势的.

   错误. 在先后行动的厂商定产博弈中, 先定产的厂商(产量领导者)具有优势.

2. 两阶段动态博弈中, 行为人的纯策略都可以表示为其行动集合 A 中的某个元素.

   错误. 后行动的行为人可以根据先手的行动来选择他的反应, 后手的策略应该表示为一个函数, 这个函数的输入是先手的行动, 输出是后手的行动集 A 中的某个元素.

3. 有限次重复博弈和无限重复博弈都可以通过逆推归纳法来求解子博弈完美均衡.

   错误. 无限重复博弈没有最后一期, 不能使用逆推归纳法.

2. 两阶段议价博弈

张三和李四分 100 元钱. 博弈共有两个阶段:

阶段一: 张三提出分配方案: $(a, 100-a)$, 其中张三拿 a, 李四拿 $100-a$. 李四选择接受或拒绝.

- 若李四接受, 博弈结束. 两人效用分别为 a 和 $100-a$.
- 若李四拒绝, 博弈进入第二阶段.

阶段二: 李四提出分配方案: $(100-b, b)$, 其中李四拿 b.

- 若张三接受, 博弈结束. 两人效用分别为 δb 和 $\delta(100-b)$, 其中 $\delta \in (0,1)$ 表示贴现率.
- 若张三拒绝, 则两人按照 $(50, 50)$ 的方案均分 100 元, 效用均为 50δ.

1. 描述第一阶段中, 两位参与人的纯策略.

   张三的纯策略是选择某个分配方案 $a \in [0, 100]$.

   李四的纯策略是给定张三的方案 a, 决定接受或拒绝. 李四的策略可以表示为函数:

   $$s_1 : [0, 100] \to \{\text{接受}, \text{拒绝}\}$$

2. 描述第二阶段中, 两位参与人的纯策略.

   李四第二阶段的纯策略是给定上一期张三的方案 $a \in [0, 100]$, 李四在第二期选择的分配方案 $b \in [0, 100]$. 李四的纯策略可以表示为函数:

   $$s_2 : [0, 100] \to [0, 100]$$

   张三第二阶段的纯策略是给定张三的方案 $a \in [0, 100]$ 以及李四的方案 $b \in [0, 100]$, 他选择接受或拒绝. 张三的纯策略可以表示为函数:

   $$s_3 : [0, 100] \times [0, 100] \to \{\text{接受}, \text{拒绝}\}$$

3. 用逆推归纳法求解博弈的均衡结果.

- 如果博弈进入第二期, 李四的最优选择是 $b \geq 50$.

    - 若 $b > 50$, 张三会选择接受.
    - 若 $b = 50$, 张三对于拒绝和接受无差异.
    - 无论李四选择哪个 $b \geq 50$, 第二阶段的均衡结果都为 $(50, 50)$, 两人的最终效用均为 50δ.
- 给定第二期中参与人收益均为 50δ, 张三在第一期会提出分配方案 $a = 100 - 50\delta$, 并且李四选择接受.
    - 若 $a > 100 - 50\delta$, 李四会拒绝这个方案并进入第二期, 张三的最终效用变为 $50\delta < 100 - 50\delta$
    - 若 $a < 100 - 50\delta$, 张三可以将 a 提高到某个 a', 其中 a' 满足 $a' \in (a, 100 - 50\delta)$. 此时李四仍然会选择接受, 并且张三的福利严格变高.
- 综上, 均衡结果为:
    - 张三在第一期提出分案 $a = 100 - 50\delta$
    - 李四选择接受, 博弈在第一期结束.

3. 先后行动的三寡头产量竞争模型

市场上有三家钢铁厂: 张三, 李四和王五. 博弈一共有两个阶段:

1. 张三选择钢铁产量 q_1
2. 李四和王五观察到张三的产量 q_1 后, 同时选择产量 q_2 和 q_3.

已知市场需求为 $p = q_0 - q$, 其中 $q = q_1 + q_2 + q_3$ 为总产量, $q_0 > 0$ 为给定常数. 求解这个动态博弈的纯策略子博弈完美纳什均衡.

答:

- 给定第一期张三的产量 $q_1 \in [0, q_0]$, 李四和王五在第二阶段的博弈为同时定产的古诺博弈, 其中市场需求为 $p = (q_0 - q_1) - q_2 - q_3$.
    - 李四的最优反应函数:
    $$q_2^*(q_3) = (q_0 - q_1 - q_3)/2$$
    - 王五的最优反应函数:
    $$q_3^*(q_2) = (q_0 - q_1 - q_2)/2$$
    - 联立可得, 李四和王五在第二阶段的均衡产量为
    $$\overline{q}_2 = \overline{q}_3 = \frac{q_0 - q_1}{3}$$
- 给定李四和王五的产量 $\left(\overline{q}_2, \overline{q}_3\right)$, 张三在第一阶段的最优化问题为:
$$\max_{q_1} \left(q_0 - q_1 - \overline{q}_2 - \overline{q}_3\right) q_1 = (q_0 - q_1) q_1 / 3$$
- 由一阶条件, 这个最优化问题的解为 $\overline{q}_1 = q_0/2$.
- 综上, 这个博弈的均衡如下:
    - 张三在第一期的策略: $\overline{q}_1 = q_0/2$
    - 李四在第二期的策略: $\overline{q}_2(q_1) = \frac{q_0 - q_1}{3}$
    - 王五在第三期的策略: $\overline{q}_3(q_1) = \frac{q_0 - q_1}{3}$

4. 重复博弈

考虑如下囚徒困境博弈, 博弈的参与人分别记为参与人 1 和参与人 2. 每个行为人的可选行动为“合作”和“不合作”.

1\2	不合作	合作
不合作	(0, 0)	(3, −1)
合作	(−1, 3)	(2, 2)

1. 假设这个博弈重复 n 次, 用逆推归纳法求解博弈的均衡结果, 其中 $n \geq 3$ 为某个给定的正整数.
   - 如果博弈进入最后一期, 前期的所有收益均可视为沉没成本. 由于单期囚徒困境的唯一均衡为 (不合作, 不合作), 每个行为人在最后一期都会选择“不合作”.
   - 给定行为人在最后一期都会选择“不合作”, 行为人在倒数第二期的理性选择也是“不合作”.
   - 给定行为人在最后两期都会选择“不合作”, 行为人在倒数第三期的理性选择也是“不合作”.
   - 由逆推归纳法, 有限期囚徒困境中, 每一期的均衡结果均为 (不合作, 不合作).
2. 假设这个博弈重复无穷次, 参与人的贴现因子均为 $\delta \in (0, 1)$. 考虑每个行为人均选择如下“触发策略”:
   - 博弈第一期选择 “合作”
   - 如果之前某一期的博弈结果不为 (合作, 合作), 此后永远选择 “不合作”.

   如果双方均选择“触发策略”构成了子博弈完美纳什均衡, 给出 δ 的取值范围.

答:

- 由对称性, 我们只需验证在给定参与人 2 使用触发策略时, 参与人 1 不会偏离均衡路径即可.
- 参与人 1 的均衡收益为:

$$2 + 2\delta + 2\delta^2 + ... = \frac{2}{1-\delta}$$

- 给定参与人 2 的策略, 若参与人 1 在第一期偏离均衡路径, 他的收益变为:

$$3 + 0\delta + 0\delta^2 + ... = 3$$

- $\frac{2}{1-\delta} \geq 3 \Longrightarrow \delta \geq 1/3$. 因此, 参数 δ 的取值范围为 $\delta \in [1/3, 1)$.